Optique géométrique des lentilles

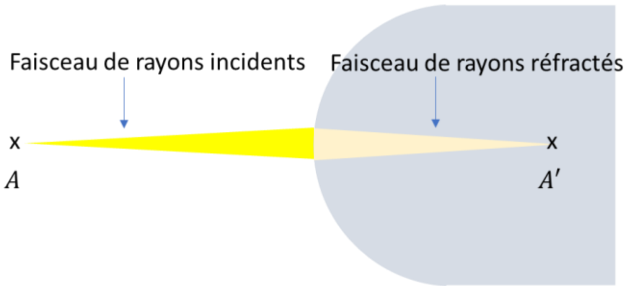
I Dioptre sphérique : observation expérimentale

Un dioptre sphérique est une interface de forme sphérique séparant deux milieux transparents d'indice de réfraction différents.

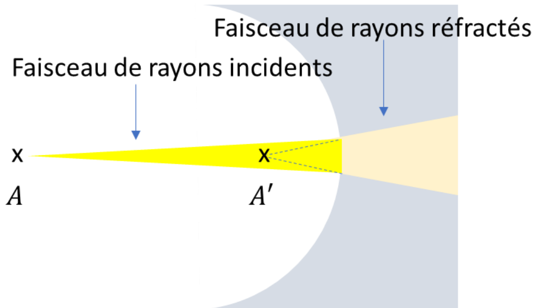
On se place dans le cas où un faisceau conique de rayons émis par une source ponctuelle de lumière placée en un point A vient se réfracter à un tel interface et on observe expérimentalement que les droites supports des rayons réfractés convergent vers un même point A' appelé image de A, ce que nous allons expliquer par des considérations géométriques.

Deux situations peuvent se produire selon le sens de la courbure de l'interface :

1ère situation : Les rayons réfractés convergent réellement vers le point A' de telle sorte que si on place un écran en ce point, on verra une petite tache lumineuse.



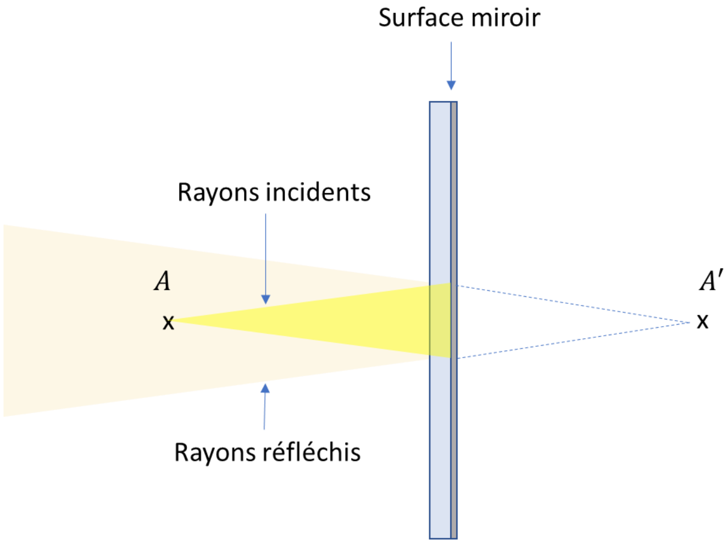
2ème situation : Les rayons réfractés divergent. Seules leurs prolongations ont une intersection en A'. Un écran placé en ce dernier point ne permettra pas de faire apparaitre une petite tache lumineuse. On dit que l'image est virtuelle.



II Stigmatisme d'un système optique

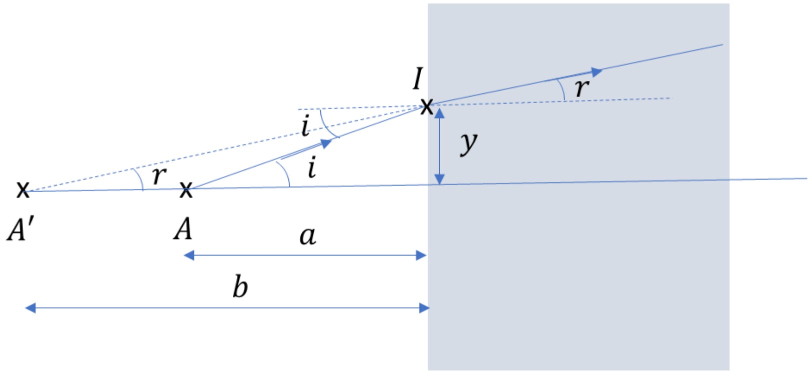
Un système optique est dit **stigmatique** si tout faisceau de rayons émis en un point (on parle de rayons incidents) et traversant ce système en ressort en un faisceau de rayons dit émergents dont les droites supports se coupent un même point

Un exemple de tel système optique est celui du miroir plan :



Qu'en est il alors d'un dioptre plan ?

Considérons deux milieux d'indices différents, le premier d'indice 1, le second d'indice n, séparés par un interface plan et un rayon incident émis en un point A se réfractant en un point I de l'interface repéré par une ordonnée y.



La trigonométrie permet d'établir les relations :

$$tan(i) = \frac{y}{a}$$

$$tan(r) = \frac{y}{b}$$

La loi de la réfraction en I s'écrit :

$$sin(i) = n\,sin(r)$$

Soit :

$$sin^2(i) = n^2\, sin^2(r)$$

$$\frac{tan^2(i)}{1 + tan^2(i)} = n^2\, \frac{tan^2(r)}{1 + tan^2(r)}$$

$$\frac{\frac{y^2}{a^2}}{1 + \frac{y^2}{a^2}} = n^2 \frac{\frac{y^2}{b^2}}{1 + \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\frac{1}{a^2 + y^2} = \frac{n^2}{b^2 + y^2}$$

$$b^2 + y^2 = n^2\,(a^2 + y^2)$$

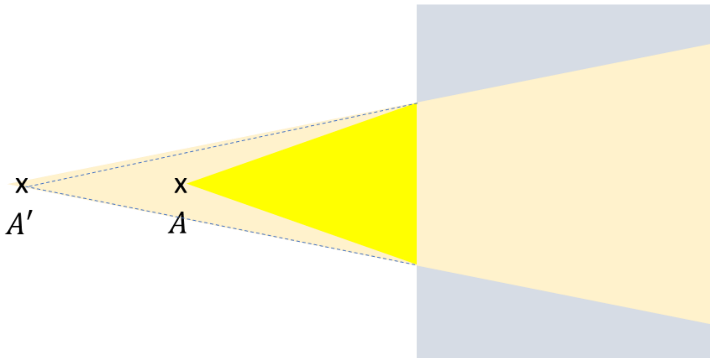
$$b^2 = n^2\, a^2 + (n^2 - 1)\, y^2$$

$$b = \sqrt{n^2\, a^2 + (n^2 - 1)\, y^2}$$

Il apparait donc que la position du point A' dépend de l'ordonnée y du point I

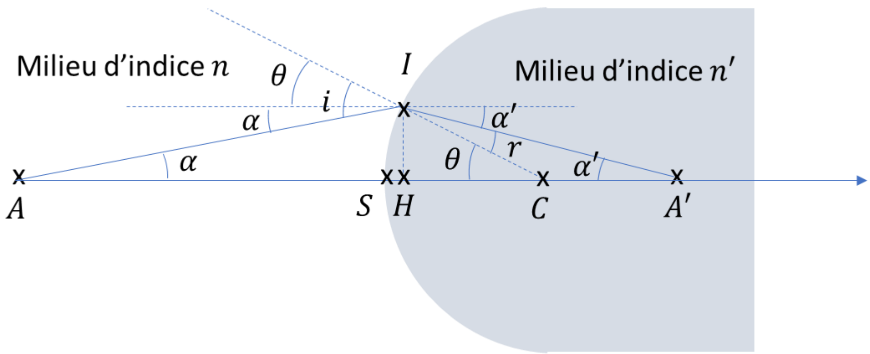
Un dioptre plan n'est donc pas un système optique rigoureusement stigmatique. Mais dans le cas où les rayons incidents sont faiblement inclinés par rapport à la perpendiculaire à l'interface du dioptre , on peut considérer le terme $(n^2 - 1)\, y^2$ comme négligeable devant le terme $n^2\, a^2$ et on obtient $b = n\, a$.

Dans ce cas, les supports des rayons émergents peuvent être considérés comme se coupant en un même point. Le dioptre plan peut alors être considéré comme stigmatique dans ce cadre. On parle de **stigmatisme approché**.



Un dioptre sphérique peut également être considéré de façon approchée comme stigmatique si les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à son axe, ce que nous allons retrouver par la géométrie.

III Relations optiques du dioptre sphérique dans le cas du stigmatisme approché :



Soit en effet un rayon incident émis en un point A se réfractant en un point I de l'interface sphérique et intersectant l'axe du cône en un point A'. Nous avons les relations angulaires :

$$\alpha + \theta = i$$

$$\theta = r + \alpha'$$

Et la loi de la réfraction en I s'écrit :

$$n\, sin(i) = n' sin(r)$$

Dans le cas où le rayon est peu incliné par rapport à l'axe du cône, on peut faire les approximations :

$$sin(i) \approx i$$

$$sin(r) \approx r$$

Et la loi de la réfraction devient :

$$n\ \ i = n'\, r$$

Soit en y reportant les relations angulaires :

$$n\ \ (\alpha + \theta) = n'\ (\theta - \alpha')$$

D'où :

$$n\,\alpha + \ n'\ \alpha' = (n' - n)\,\theta$$

Or en utilisant la trigonométrie de la tangente dans les triangles $A\ H\ I$, $H\ C\ I$ et $A'H\ I$:

$$\alpha \approx tan(\alpha) = \frac{IH}{AH}$$

$$\alpha' \approx tan(\alpha') = \frac{IH}{A'H}$$

$$\theta \approx tan(\theta) = \frac{IH}{HC}$$

En reportant dans l'équation précédente, on a, après simplification par IH :

$$\frac{n}{AH} + \frac{n'}{A'H} = \frac{n' - n}{HC}$$

Or, on a également les approximations :

$$AH \approx AS$$

$$A'H \approx A'S$$

$$HC \approx SC$$

Donc :

$$\frac{n}{AS} + \frac{n'}{A'S} = \frac{n' - n}{SC}$$

Soit, en faisant apparaitre des mesures algébriques, l'axe du cône étant orienté de A vers S :

$$\boxed{\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}}}$$

Cette relation, qualifiée de **relation de conjugaison du dioptre sphérique** et valable par une démonstration analogue pour les deux types de courbure (faisceau réfracté convergent ou divergent) montre qu'un dioptre sphérique peut être considéré comme stigmatique dans le cas où les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à **l'axe optique** (l'axe du cône de rayons incidents). Ces conditions sont qualifiées de **conditions d'approximation de Gauss**.

Foyers objets et images d'un dioptre sphérique :

En éloignant le point objet A à l'infini, ce dernier émet un faisceau de rayons parallèles, lesquels convergent en un point F' appelé foyer image et dont la position est obtenue à partir de la relation de conjugaison en faisant tendre $\overline{SA}$ vers $-\infty$, ce qui donne :

$$\boxed{\overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n}\,\overline{SC}}$$

Inversement, il existe un point objet F appelé foyer objet dont l'image A' est à l'infini, c'est-à-dire tel que le faisceau réfracté soit un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique. Sa position est obtenue en faisant tendre $\overline{SA'}$ vers $+\infty$, ce qui donne :

$$\boxed{\overline{SF} = \frac{-n}{n' - n}\,\overline{SC}}$$

On peut noter au passage les propriétés :

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{SF} + \overline{SF'} = \overline{SC} \\ \frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = -\frac{n}{n'}\end{gathered}}$$

On définit également **la vergence d'un dioptre plan** :

$$\boxed{V = \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SF'}} = -\frac{n}{\overline{SF}}}$$

Notons que la relation de conjugaison s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} = 1}$$

Relation de conjugaison de Newton :

Transformons la relation précédente en reliant les points objet et image à leur foyer respectif :

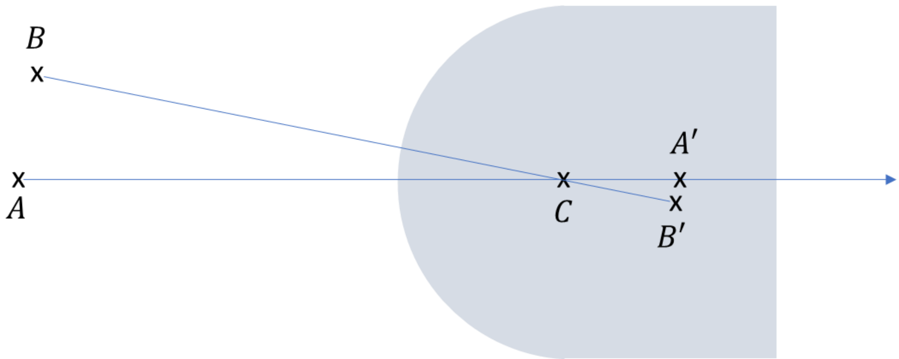
$$\frac{\overline{SF}}{\overline{SF} + \overline{FA}} + \frac{\overline{SF'}}{\overline{SF'} + \overline{F'A'}} = 1$$

$$\overline{SF}\left(\overline{SF'} + \overline{F'A'}\right) + \overline{SF'}\left(\overline{SF} + \overline{FA}\right) = \left(\overline{SF} + \overline{FA}\right)\left(\overline{SF'} + \overline{F'A'}\right)$$

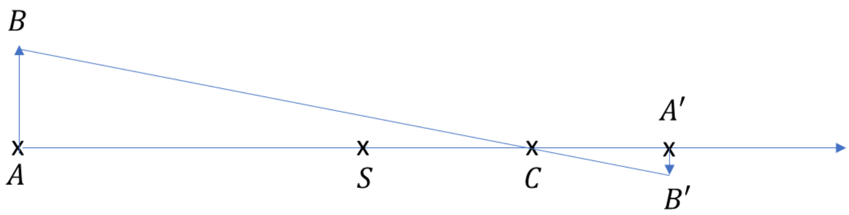
$$\boxed{\overline{FA}\ \overline{F'A'} = \overline{SF}\ \overline{SF'}}$$

Grandissement d'un objet

Considérons un point B situé sur une sphère de centre C, le centre de l'interface sphérique, et de rayon AC. Le point B' image de B par le dioptre sphérique est alors situé sur la sphère de centre C et de rayon $A'C$, comme indiqué sur le schéma :



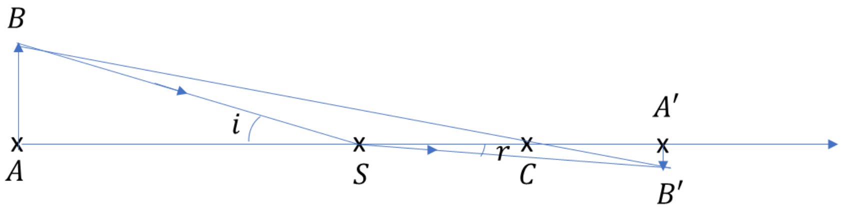
Dans le cas où B est proche du point A, il peut être considéré comme étant dans le plan tangent à la sphère en A, idem pour B' dans le plan tangent à la sphère en A'. La situation peut alors être schématisée de la façon suivante :



Le grandissement algébrique de l'objet AB est alors défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

Considérons alors le rayon issu de B et se réfractant au niveau du sommet S du dioptre



La loi de la réfraction en ce point s'écrit, compte tenu des approximations de petits angles :

$$n\,i = n'r$$

Et en utilisant la tangente dans les triangles SAB et $SA'B'$:

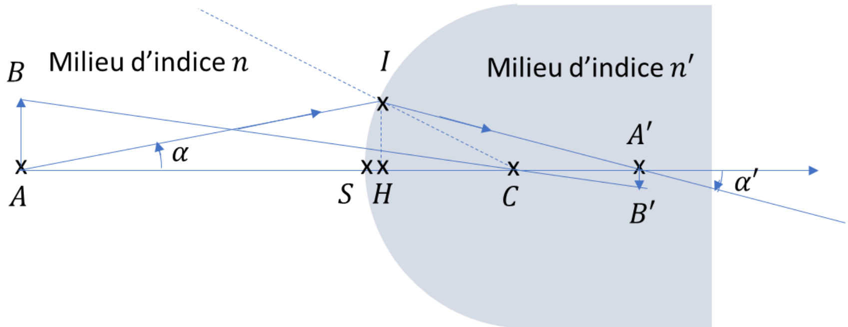
$$n\frac{\overline{AB}}{-\overline{SA}} = n'\frac{-\overline{A'B'}}{\overline{SA'}}$$

D'où on déduit la relation :

$$\boxed{\gamma = \frac{n\,\overline{SA'}}{n'\overline{SA}}}$$

Relation de Lagrange Helmoltz

Considérons un rayon incident partant d'un point A de l'axe optique et faisant un angle (orienté) α avec ce dernier. Notons α', l'angle orienté que fait le rayon réfracté avec l'axe optique.



Dans l'approximation des petits angles :

$$\overline{HI} = \overline{AH}\,\alpha = \overline{A'H}\,\alpha'$$

Donc :

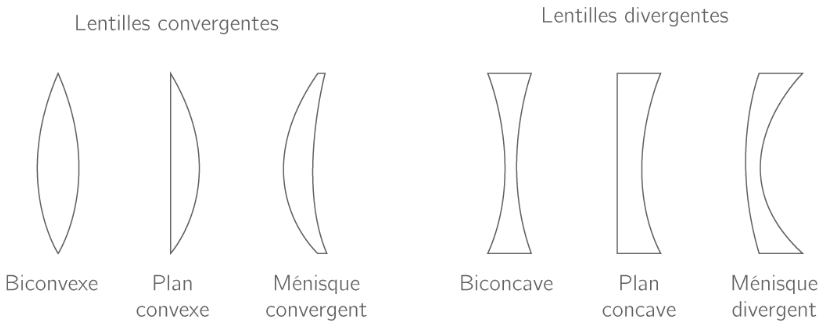
$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\overline{A'H}}{\overline{AH}} \approx \frac{\overline{A'S}}{\overline{AS}} = \frac{n'\,\overline{A'B'}}{n\,\overline{AB}}$$

Soit :

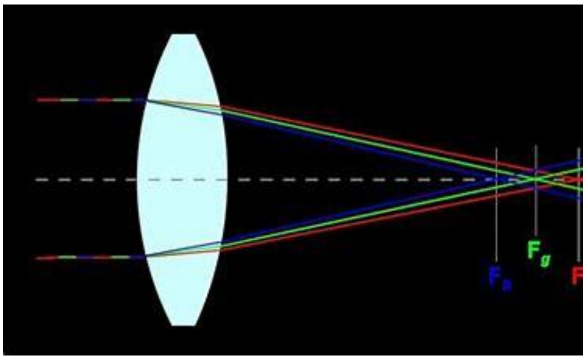
$$\boxed{n\,\overline{AB}\,\alpha = n'\,\overline{A'B'}\,\alpha'}$$

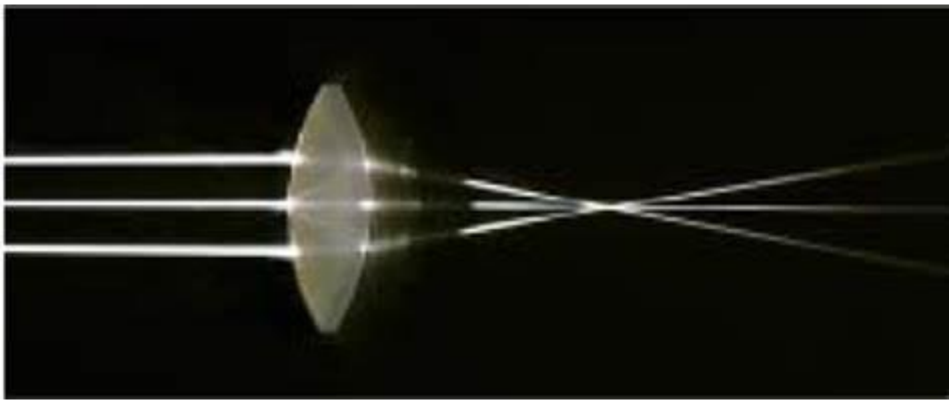
IV Lentilles dans le cadre du stigmatisme approché

Une lentille est un système optique constitué de deux dioptres plans ou sphériques dont au moins un est sphérique. Deux types de lentilles existent, des lentilles convergentes et des lentilles divergentes

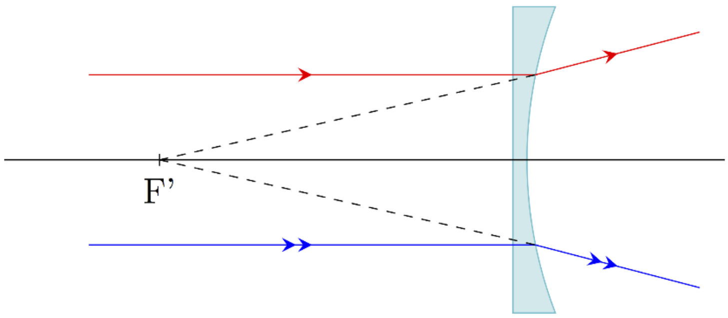


Une lentille convergente a un foyer image qui est réel, mais dont la position dépend de l'indice de réfraction comme nous le montrerons par l'étude géométrique qui suit.



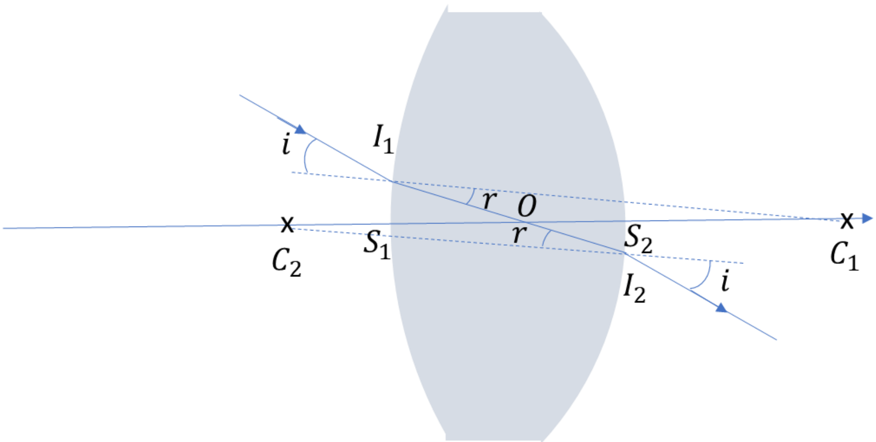


Une lentille divergente a un foyer image qui est virtuel



Centre optique d'une lentille

Le centre optique O d'une lentille est un point de l'axe optique tel que tout rayon incident qui se réfracte en passant par ce point donne un rayon émergent qui lui est parallèle.



Notons C_1 le centre du premier dioptre sphérique, C_2 celui du second et convenons des notations suivantes pour les rayons de courbure algébriques :

$$R_1 = \overline{S_1C_1}$$

$$R_2 = \overline{S_2C_2}$$

Le théorème de Thalès indique que les droites (I_1C_1) et (I_2C_2) sont parallèles si et seulement si :

$$\frac{OC_1}{OC_2} = \frac{C_1I_1}{C_2I_2}$$

Soit avec des valeurs algébriques :

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Donc :

$$R_2\,\overline{OC_1} = R_1\,\overline{OC_2}$$

$$R_2\,(\overline{OS_1} + \overline{S_1C_1}) = R_1\,(\overline{OS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2C_2})$$

$$(R_2 - R_1)\,\overline{OS_1} = R_1\,\overline{S_1S_2}$$

$$\boxed{\overline{OS_1} = \frac{R_1}{R_2 - R_1}\,\overline{S_1S_2}}$$

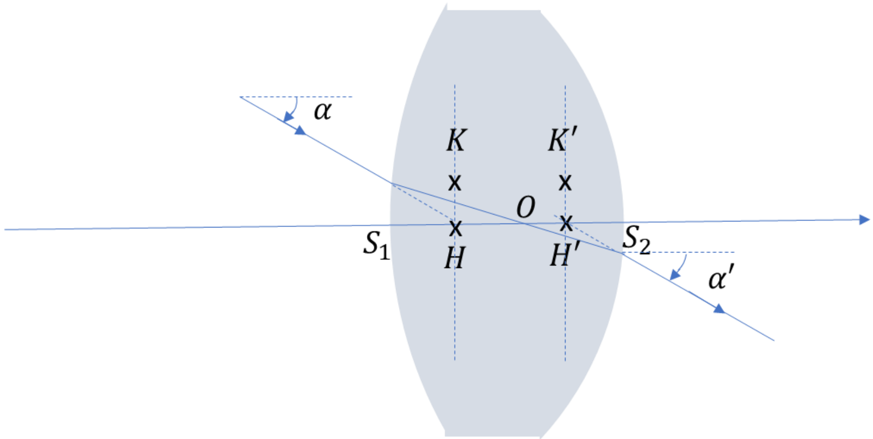
Soit, en notant $\overline{S_1S_2} = e$:

$$\boxed{\overline{S_1O} = \frac{R_1\,e}{R_2 - R_1}}$$

$$\boxed{\overline{S_2O} = \frac{R_2\,e}{R_2 - R_1}}$$

Points principaux :

Considérons le point H de l'axe optique dont O est l'image par le premier dioptre et H' l'image du point O par le second dioptre.



Considérons un rayon incident associé au point objet H (virtuel sur la figure). Il ressort de la lentille sous forme d'un rayon émergent associé au point image H' (virtuel sur la figure). D'après la relation de Lagrange Helmoltz, en notant n l'indice de réfraction de la lentille et n_0 celui du milieu dans lequel elle baigne, si K est un point situé dans le plan passant par H orthogonal à l'axe optique et K' son image par la lentille, alors :

$$n_0\,\overline{HK}\,\alpha = n_0\,\overline{H'K'}\,\alpha'$$

Or, rayon incident et rayon émergent étant parallèles, on a

$$\alpha = \alpha'$$

Donc :

$$\boxed{\overline{HK} = \overline{H'K'}}$$

Les points H et H' , appelés points principaux, sont donc deux points conjugués pour lesquels le grandissement algébrique est égal à 1.

Voyons maintenant leurs positions en exploitant les relations de conjugaison des deux dioptres sphériques :

$$\frac{n}{\overline{S_1O}} - \frac{n_0}{\overline{S_1H}} = \frac{n-n_0}{R_1}$$

$$\frac{n\,(R_1-R_2)}{R_1\,e} - \frac{n_0}{\overline{S_1H}} = \frac{n-n_0}{R_1}$$

$$\boxed{\overline{S_1H} = \frac{n_0\,R_1\,e}{n\,(R_1-R_2)-(n-n_0)\,e}}$$

Un travail analogue sur le second dioptre conduit à :

$$\boxed{\overline{S_2H'} = \frac{n_0\,R_2\,e}{n\,(R_1-R_2)-(n-n_0)\,e}}$$

Foyers

Un faisceau incident de rayons parallèles à l'axe optique a pour image le foyer image $F_1{}'$ du premier dioptre sphérique, lequel a pour image le foyer image F' de la lentille (lequel peut éventuellement être à l'infini).

La relation de conjugaison du premier dioptre s'écrit :

$$\frac{n}{\overline{S_1F_1{}'}} = \frac{n - n_0}{R_1}$$

Ce qui donne :

$$\overline{S_1F_1{}'} = \frac{n\,R_1}{n - n_0}$$

Et la relation du second dioptre :

$$\frac{n_0}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{\overline{S_2F_1{}'}} = \frac{n_0 - n}{R_2}$$

Soit en y injectant la première :

$$\frac{n_0}{\overline{S_2F'}} = \frac{n_0 - n}{R_2} + \frac{n}{\overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1{}'}}$$

$$\frac{n_0}{\overline{S_2F'}} = \frac{n_0 - n}{R_2} + \frac{n}{-e + \frac{n\,R_1}{n - n_0}}$$

$$\frac{n_0}{\overline{S_2F'}} = \frac{-(n - n_0)}{R_2} + \frac{n\,(n - n_0)}{n\,R_1 - e\,(n - n_0)}$$

$$\frac{n_0}{\overline{S_2F'}} = \frac{(n - n_0)\left(n\,(R_2 - R_1) + e\,(n - n_0)\right)}{R_2\left(n\,R_1 - e\,(n - n_0)\right)}$$

$$\boxed{\overline{S_2F'} = \frac{n_0\,R_2\left(n\,R_1 - e\,(n - n_0)\right)}{(n - n_0)\left(n\,(R_2 - R_1) + e\,(n - n_0)\right)}}$$

On définit la **distance focale image** par :

$$f' = \overline{H'F'} = \overline{H'S_2} + \overline{S_2F'} = \frac{n_0\,R_2\left(n\,R_1 - e\,(n - n_0)\right)}{(n - n_0)\left(n\,(R_2 - R_1) + e\,(n - n_0)\right)} - \frac{n_0\,R_2\,e}{n\,(R_1 - R_2) - (n - n_0)\,e}$$

Soit :

$$\boxed{f' = \overline{H'F'} = \frac{n_0\,n\,R_1\,R_2}{(n - n_0)\left(n\,(R_2 - R_1) + e\,(n - n_0)\right)}}$$

<u>Vergence de la lentille</u> :

Elle est définie par :

$$V = \frac{n_0}{f'} = \frac{(n - n_0)\left(n\,(R_2 - R_1) + e\,(n - n_0)\right)}{n\,R_1\,R_2}$$

$$\boxed{V = \frac{n_0}{f'} = (n - n_0)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(n - n_0)^2\, e}{n\, R_1\, R_2}}$$

Remarque

La vergence du premier dioptre est :

$$V_1 = \frac{n - n_0}{R_1}$$

Et celle du second dioptre :

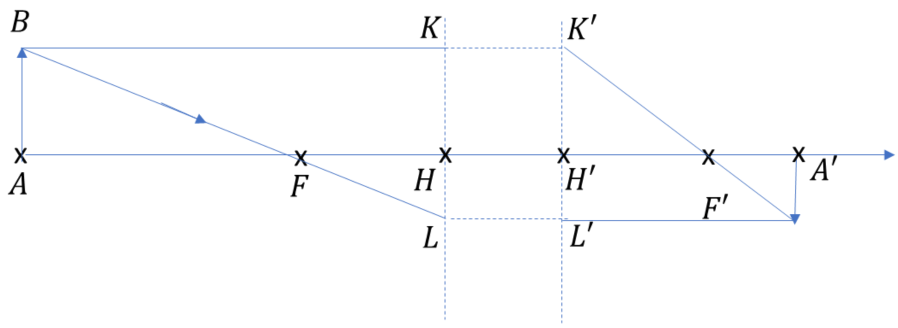
$$V_2 = \frac{n_0 - n}{R_2} = -\frac{n - n_0}{R_2}$$

De telle sorte que l'on a :

$$\boxed{V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2}$$

Ce qui est obtenu de façon plus générale avec **la formule de Gullstrand**.

Relation de conjugaison avec origine aux points principaux



Le théorème de Thalès permet d'écrire les relations :

$$\frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}}$$

$$\frac{\overline{H'K'}}{\overline{L'K'}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{L'B}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}}$$

D'où on déduit :

$$\frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} + \frac{\overline{H'K'}}{\overline{L'K'}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}}$$

Or :

$$\frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} + \frac{\overline{H'K'}}{\overline{L'K'}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} + \frac{\overline{HK}}{\overline{LK}} = 1$$

Donc :

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}}=1$$

Or :

$$\overline{HF}=-\overline{H'F'}=-f'$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{H'A'}}-\frac{1}{\overline{HA}}=\frac{1}{f'}}$$

V Lentilles minces placées dans l'air

Une lentille mince est une lentille pour laquelle l'épaisseur $|e|$ est petite devant les rayons de courbure des dioptres sphériques.

Dans ce cas, les points O, H, H' peuvent être considérés comme confondus et les formules de simplifient :

Vergence :

$$\boxed{V=\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

Loi de conjugaison

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f'}}$$

Accolement de lentilles minces :

Soit une première lentille de centre optique O_1, de distance focale image $f_1{}'$ que l'on accole à une seconde lentille de centre optique O_2, de distance focale image $f_2{}'$.

Notons A_1 l'image donnée par la première lentille d'un point A situé sur l'axe optique et A' l'image de A_1 par la seconde lentille. Alors on a :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}}-\frac{1}{\overline{O_1A}}=\frac{1}{f_1{}'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}}-\frac{1}{\overline{O_2A_1}}=\frac{1}{f_2{}'}$$

Si la distance O_1A est grande devant l'épaisseur des lentilles alors, en notant O le milieu de $[O_1\ O_2]$:

$$\overline{O_1A}\approx\overline{OA},\qquad \overline{O_1A_1}\approx\overline{OA_1}, \overline{O_2A'}\approx\overline{OA'}, \overline{O_2A_1}\approx\overline{OA_1}$$

auquel cas, l'addition des deux relations de conjugaison donne :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f_1{}'}+\frac{1}{f_2{}'}}$$

Deux lentilles minces accolées sont donc équivalentes à une lentille mince de vergence égale à la somme de leurs vergences.