# *Logique Mathématique*

## I Notion de proposition et de variable

Une proposition est un énoncé fait dans le langage courant ou le langage mathématique, qui porte une valeur de vérité, soit **vrai**, soit **faux**.

Exemples :

« Un chat est un mammifère » est une proposition vraie

« Un chat est un poisson » est une proposition fausse

Différents types de propositions peuvent être formulées :

- Des **propositions élémentaires** qualifiant un individu ou un objet d'un ensemble de ces individus ou de ces objets (par la suite, nous désignerons par objets les éléments d'un ensemble quelconque)

Exemple : A supposer que le chat préféré de la Reine d'Angleterre soit roux :

« Le chat préféré de la Reine d'Angleterre est gris » est une proposition fausse portant sur l'unique objet : le chat, qui appartient à un ensemble plus vaste, celui des chats d'Angleterre, par exemple.

- Des **propositions** que nous qualifierons d'**extensives,** qui portent sur tous les objets d'un ensemble donné

Exemples :

1) A supposer que tous les enfants de la famille Adams aient les cheveux noirs

« Tous les enfants de la famille Adams ont les cheveux noirs » est une proposition vraie portant sur l'ensemble formé par les enfants de la famille Adams

2) « Le carré de tout nombre entier naturel est supérieur ou égal à ce nombre » est une proposition vraie portant sur l'ensemble infini des nombres entiers naturels

Dans les propositions extensives, l'objet concerné par la proposition (le nombre entier naturel dans la précédente) forme ce que l'on appelle une **variable**. Ce concept de variable est essentiel en Mathématiques et on le retrouve dans le langage informatique, où il correspond à un espace mémoire réservé par exemple à un entier désigné par une lettre comme N.

Dans l'exemple 1 précédent, la variable est un enfant de la famille Adams, dans l'exemple 2, un nombre entier naturel.

Notre langage naturel, le français, est cependant mal adapté au raisonnement. L'ambiguïté dans l'interprétation de certaines phrases, deux individus différents ne comprenant pas forcément la même chose dans un énoncé, en est à la source. Il n'est qu'à penser à l'emploi de la conjonction « ou », sujette à de nombreuses confusions, car il existe un « ou » inclusif et un « ou » exclusif. Quand on dit « Jean est français ou allemand », on peut comprendre que Jean est français et pas allemand ou bien allemand et pas Français sans qu'il puisse être à la fois français et allemand. C'est le sens du ou exclusif. En mathématiques le « ou », lorsqu'il est employé seul, est inclusif, c'est-à-dire que les trois interprétations précédentes sont valables.

Le langage mathématique va donc pallier aux inconvénients du langage naturel en créant un code à la fois universel et dépourvu de toute ambiguïté. Il semble alors totalement paradoxal qu'il soit si mal aimé de si nombreux étudiants. Mais c'est peut-être simple affaire de pédagogie et de pratique.

## II Les symboles du langage mathématique

Comme tout langage, le langage mathématique possède un alphabet, des mots et une syntaxe. A la différence des langages naturels, le langage mathématique est d'une concision sans égal. Son dictionnaire pourrait se résumer à un ensemble de symboles tenant sur un mouchoir de poche, qui aurait à peu de choses près cette forme :

<u>Des lettres pour désigner des variables ou des propositions</u>

a,b,c,d,…. (alphabet latin minuscule et majuscule)

$\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \gamma, \eta, \iota, \varphi, \kappa, \lambda, \mu, \nu$, … (alphabet grec minuscule et majuscule)

<u>Des lettres indicées</u> comme : $a_1$ , $a_{12}$ , etc

<u>Des lettres avec exposant</u> : $a^2$

<u>Des lettres surmontées de barres ou de flèches, ou entourées de barres verticales</u> :

$$\vec{a}\ ;\ \|\vec{a}\|\ ;|a|\ ; etc$$

<u>Des chiffres pour former les nombres</u> :

0, 1, 2, 3 …

<u>Des connecteurs logiques</u> :

∧ pour désigner le « et » logique (mais aussi parfois le pgcd)

∨ pour désigner le « ou» inclusif logique (mais aussi parfois le ppcm)

<u>Des quantificateurs</u> :

∀ pour désigner « quelque soit » ou « Pour tout »

∃ pour désigner « il existe (au moins un) »

<u>Des symboles de comparaison</u> <u>pour des nombres</u> :

$< ; \leq ; > ; \geq$

<u>Des symboles de comparaison</u> <u>pour des ensembles</u> :

$\subset ; \supset$

<u>Des symboles d'appartenance à un ensemble</u> :

$\in ; \notin$

<u>Des connecteurs d'ensembles</u>

∩ (intersection)

∪ (réunion)

<u>Des symboles d'opération</u> : $+ ; - ; \times ; \div$

Des parenthèses : ( )

Des crochets : [    ]

La liste n'est pas exhaustive mais s'arrêterait assez vite, rien à voir avec un dictionnaire de Français, ou d'Anglais.

Les propositions portant sur des objets mathématiques gagnent alors en clarté à être formulées avec le dictionnaire mathématique, en évitant tant que faire se peut, une dérive courante dans l'enseignement, qui consiste à mélanger langage naturel et langage mathématique, à l'image du Franglais de Louis de Funès dans un film bien célèbre : « Yes, I am tout à fait sur, my Lord ! »

Aussi, éviterons-nous les formules, pourtant encore abondamment rencontrées, du type :

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $n^2 \geq n$ »

et les remplacerons-nous par un langage 100 % mathématique, donc compréhensible, a priori par un Népalais ou un Chinois éduqué en Mathématiques.

«$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$ »

## III Connecteurs logiques ET, OU, tables de vérités

Les propositions élémentaires peuvent être connectées pour former de nouvelles propositions.

Ainsi, puisque je m'appelle Laurent Gry et que je suis Français sans aucune autre nationalité, « Laurent Gry est français » est une proposition vraie. Nous la désignerons par la lettre $F$, « Laurent Gry est allemand » est une proposition fausse. Nous la désignerons par la lettre $A$

« Laurent Gry est français » ET « Laurent Gry est allemand » est une nouvelle proposition qui est fausse. Nous la désignerons par : $\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{A}$

« Laurent Gry est français » OU « Laurent Gry est allemand » est une nouvelle proposition qui est en revanche vraie. Nous la désignerons par : $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{A}$

Afin de dissiper toute ambiguïté dans l'emploi du « ET » et du « OU » en logique mathématique, on établit des **tables de vérité**. Si $P$ et $Q$ sont deux propositions ayant une valeur de vérité pouvant être soit Vrai soit Faux, nous désignerons, la valeur Vrai par le chiffre 1 et la valeur faux par 0. Toutes les possibilités sont alors données par ces tables :

**<u>Table du « ET » logique</u>** :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**<u>Table du « OU » logique</u>** :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Revenons sur le « OU exclusif» logique dont la table est :

| $P$ | $Q$ | $P \Delta Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Notez alors que $P \Delta Q$ a la même table de vérité que $(P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)$ où $\bar{Q}$ désigne la proposition contraire de $Q$, nous y reviendrons.

## IV Proposition contraire

La proposition contraire de « Laurent Gry est Français » est « Laurent Gry n'est pas Français ». Si nous désignons par $P$ la première, la seconde sera désignée par $non\ P$ ou $\bar{P}$. La table de vérité de la négation d'une proposition résume ce fait.

| $P$ | $\bar{P}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Nous allons alors établir un certain nombre de propriétés concernant les propositions contraires.

Négation d'un « ET » logique :

Faisons la table de vérité de $\overline{P \wedge Q}$ et de $\bar{P} \vee \bar{Q}$

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\overline{P \wedge Q}$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P} \vee \bar{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nous constatons une propriété essentielle sur l'ensemble formé par les couples $(P\,;Q)$ de propositions quelconques : $\overline{P \wedge Q}$ et $\bar{P} \vee \bar{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité. On dit qu'elles sont équivalentes, ce qui se traduit dans notre langage naturel par :

Si $\overline{P \wedge Q}$ est vraie alors $\bar{P} \vee \bar{Q}$ est vraie

Réciproquement, si $\bar{P} \vee \bar{Q}$ est vraie, alors $\overline{P \wedge Q}$ est vraie

Dans le langage mathématique, cela s'écrit avec un connecteur logique dit d'**équivalence** en forme de double flèche :

$$\boxed{\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}}$$

Voyons le lien avec notre langage naturel :

Enoncer le contraire de « Jean est français et Jean est allemand » équivaut à énoncer « Jean n'est pas français ou Jean n'est pas allemand ». Bien prendre garde que cela n'équivaut pas à « Jean n'est ni français ni allemand ». Autrement dit, $\overline{P \ \wedge \ Q}$ et $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ ne sont pas équivalentes, comme une table de vérité le ferait aisément voir.

<u>Négation d'un « OU » logique</u> :

Faisons la table de vérité de $\overline{P \ \vee \ Q}$ et de $\bar{P} \wedge \bar{Q}$

| $P$ | $Q$ | $P \ \vee \ Q$ | $\overline{P \ \vee \ Q}$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nous constatons une nouvelle propriété :

$$\boxed{\overline{P \ \vee \ Q} \ \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}}$$

Voyons le lien avec notre langage naturel :

Enoncer le contraire de « Jean est français ou Jean est allemand » équivaut à énoncer « Jean n'est pas français et Jean n'est pas allemand », autrement dit « Jean n'est ni français ni allemand ».

**Notez bien que le symbole de négation se distribue sur chaque proposition en retournant le symbole $\vee$ ou $\wedge$.**

## V Connecteurs logiques d'implication et d'équivalence-Prédicats

Considérons deux propositions formulées sur les objets d'un ensemble $\mathbb{E}$ quelconque. En voici deux exemples :

1) $\mathbb{E} = \{(A;B;C) \in \mathcal{P}^3 : \ A \neq B, \ A \neq C, \ B \neq C \}$ désigne l'ensemble des triangles éventuellement aplatis d'un plan donné $\mathcal{P}$ :

$P =$ « $\widehat{BAC} = 90°$ »

$Q =$ « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ »

La proposition $P$ traduit que le triangle $(A;B;C)$ est rectangle en $A$.

Le théorème de Pythagore assure que si $P$ est vraie alors $Q$ est vraie. En langage mathématique on traduit cela par un connecteur logique dit d'implication sous forme :

$$P \Rightarrow Q$$

qui se lit « $P$ implique $Q$ » . Soit plus explicitement :

$$\boxed{\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

L'écriture précédente est une simplification de l'écriture suivante, plus juste :

$$« \forall\ (A;B;C) \in \mathbb{E}^3 : \widehat{BAC} = 90° \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 »$$

qui dans le langage naturel, se traduirait par une formulation du genre :

« Dans un triangle d'un plan quelconque, si ce triangle possède un angle droit, alors la somme des carrés des côtés adjacents à cet angle droit est égal au carré du côté opposé »

Nous voyons d'emblée la concision apportée par le langage mathématique.

Mais voyons les choses de façon encore plus précise. $P$ et $Q$ sont des propositions portant sur une variable qui est un triplet $(A;B;C)$ de points de $\mathbb{E}$. On ne peut donc affecter à ces propositions des valeurs de vérités que si on considère une occurrence précise de cette variable. A défaut, $P$ et $Q$ sont appelées des **prédicats** portant sur les objets de $\mathbb{E}$. On devrait alors mieux écrire :

$P(A,B,C) =$ « $\widehat{BAC} = 90°$ »

$Q(A,B,C) =$ « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ »

Nous pouvons alors définir l'ensemble des solutions du prédicat $P$ dans $\mathbb{E}$ qui est le sous ensemble de triplet $(A,B,C)$ de $\mathbb{E}$ pour lesquels la proposition « $\widehat{BAC} = 90°$ » est vraie. Si nous le notons $\mathbb{S}_P$ et si nous notons $\mathbb{S}_Q$ celui associé à $Q$, nous voyons que dire que $P$ implique $Q$ dans l'ensemble $\mathbb{E}$ revient à dire que $\mathbb{S}_P$ est inclus dans $\mathbb{S}_Q$. Retenons donc :

$$\boxed{P \Rightarrow Q \quad \text{signifie} \quad \mathbb{S}_P \subset \mathbb{S}_Q}$$

La réciproque du théorème de Pythagore se traduit alors par le fait que $Q \Rightarrow P$ est une proposition extensive vraie sur $\mathbb{E}$., soit $\mathbb{S}_Q \subset \mathbb{S}_P$.

Par conséquent, sur $\mathbb{E}$, $\mathbb{S}_P = \mathbb{S}_Q$, ce que l'on traduit en disant que $P$ et $Q$ sont équivalentes, soit :

$$\boxed{\widehat{BAC} = 90° \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

2) $\mathbb{E} = \mathbb{R}$

$P(x) =$ « $x \geq 1$ »

$Q(x) =$ « $x^2 \geq 1$ »

$P$ et $Q$ sont donc deux prédicats formulés sur les nombres réels. Voyons leur valeur de vérité pour différentes valeur de la variable $x$

$P(1) =$ « $1 \geq 1$ » est vrai

$Q(1) =$ « $1^2 \geq 1$ » est vrai

$P(-1) =$ « $-1 \geq 1$ » est faux

$Q(-1) =$ « $(-1)^2 \geq 1$ » est vrai

Déterminons les ensembles de solutions de ces prédicats :

$\mathbb{S}_P = [1; +\infty[$

$\mathbb{S}_Q = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Nous constatons que $\mathbb{S}_P$ est inclus dans $\mathbb{S}_Q$ donc que $P$ implique $Q$ et donc écrire une proposition vraie :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} :\; x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1}$$

La réciproque de cette proposition est :

$\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$

mais elle est fausse car $\mathbb{S}_Q$ n'est pas inclus dans $\mathbb{S}_P$

Les prédicats $P$ et $Q$ ne sont donc pas équivalents sur $\mathbb{R}$, en revanche, ils le sont sur $\mathbb{R}^{+*}$. La proposition suivante devient donc vraie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}. : \ x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

Retenons :

**<u>La définition de l'implication</u>** :

**Etant donnés deux prédicats $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ formulés pour la variable $\boldsymbol{x}$ d'un ensemble $\mathbb{E}$, on dit que $\boldsymbol{P}$ implique $\boldsymbol{Q}$ si le sous ensemble d'occurrences de $\boldsymbol{x}$ rendant $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ vraie est inclus dans celui rendant $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ vraie. On le traduit par l'écriture (sous entendant que la proposition est vraie) :**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{E} : \ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$$

**<u>La définition de l'équivalence</u>** :

**Etant donnés deux prédicats $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ formulés pour la variable $\boldsymbol{x}$ d'un ensemble $\mathbb{E}$, on dit que $\boldsymbol{P}$ équivaut à $\boldsymbol{Q}$ si le sous ensemble d'occurrences de $\boldsymbol{x}$ rendant $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ vraie est égal à celui rendant $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ vraie. On le traduit par l'écriture (sous entendant que la proposition est vraie) :**

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{E} : \ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$$

## VI Proposition implicative contraposée- proposition implicative réciproque

Soit une proposition du type implication c'est-à-dire de la forme :

$$A = « \ \forall\, x \in \mathbb{E} : \ P(x) \Rightarrow Q(x) \ »$$

les guillemets étant pour traduire qu'elle est une proposition de valeur de vérité quelconque, par exemple, la proposition fausse suivante

$$A = « \ \forall\, x \in \mathbb{Z} : \ x < 4 \Rightarrow x^2 < 16 »$$

La **contraposée de $\boldsymbol{A}$**, littéralement proposition posée par les contraires, est alors la proposition :

$$B = « \ \forall\, x \in \mathbb{E} : \ non\ Q(x) \Rightarrow nonP(x) \ »$$

Dans l'exemple, cela donne :

$$B = « \ \forall\, x \in \mathbb{Z} : \ x^2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 4 »$$

Bien prendre garde que la contraposée de $A$ n'est pas la proposition contraire qui serait :

$$\bar{A} = « \ \exists\, x \in \mathbb{E} : \ P(x) \wedge nonQ(x) \ »$$

Soit, dans l'exemple :

$$\bar{A} = « \exists\, x \in \mathbb{Z} :\; x < 4 \wedge x^2 \geq 16 »$$

Notez enfin qu'il est plus aisé de se rendre compte du fait que $\bar{A}$ est vraie, Il suffit pour cela de prendre pour $x$ l'entier relatif (-5), que de de se rendre compte que $A$ est fausse.

La **réciproque de $A$** est la proposition :

$$\boxed{C = « \forall\, x \in \mathbb{E} :\; Q(x) \Rightarrow P(x) »}$$

Dans l'exemple :

$$C = « \forall\, x \in \mathbb{Z} :\; x^2 < 16 \Rightarrow x < 4 »$$

Elle est par ailleurs fausse.

**Une proposition implicative a même valeur de vérité que sa contraposée mais pas nécessairement que sa réciproque.**

Voyons d'autres exemples

1) « $\forall\, x \in \mathbb{R} :\; x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ » est vraie car le sous ensemble de réels rendant vrai $x = 1$ est $\{1\}$ et il est inclus dans celui rendant vrai $x^2 = 1$ qui est $\{-1, 1\}$. Les deux sous ensembles étant distincts, la réciproque est fausse.

   La contraposée est vraie et s'exprime par : « $\forall\, x \in \mathbb{R} :\; x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ »

   Pour que la réciproque soit vraie, il faut modifier l'énoncé en :

   « $\forall\, x \in \mathbb{R} :\; x = 1 \; ou \; x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$ »

2) « $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; x\, y = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; y = 0$ » est vraie ainsi que sa réciproque. La forme contraposée convainc d'ailleurs plus facilement du fait que la proposition originale est vraie. Elle s'exprime par : « $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \neq 0 \; et \; y \neq 0 \Rightarrow x\, y \neq 0$ »

## VII Négation des propositions avec quantificateurs

1) Proposition d'existence

Soit une proposition du type :

$$A = \text{« } \exists\, x \in \mathbb{E} : \ P(x) \text{ »}$$

Sa négation est alors :

$$\bar{A} = \text{« } \forall\, x \in \mathbb{E} : \ nonP(x) \text{ »}$$

Exemple formulé dans le langage naturel :

$A =$ « Il existe un animal appartenant à l'ensemble des animaux tel que : l'animal a 4 yeux »

$\bar{A} =$ « quelque soit l'animal appartenant à l'ensemble des animaux, l'animal n'a pas 4 yeux »

Exemple formulé dans le langage mathématique :

$$A = \text{« } \exists\, x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 0 \text{ »}$$

$$\bar{A} = \text{« } \forall\, x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 0 \text{ »}$$

2) Proposition d'exhaustivité

Soit une proposition du type :

$$A = \text{« } \forall\, x \in \mathbb{E} : \ P(x) \text{ »}$$

Sa négation est alors :

$$\bar{A} = \text{« } \exists\, x \in \mathbb{E} : \ nonP(x) \text{ »}$$

3) Proposition implicative

Soit une proposition du type :

$$A = « \forall x \in \mathbb{E} : \; P(x) \Rightarrow Q(x) »$$

Sa négation est alors :

$$\bar{A} = « \exists x \in \mathbb{E} : \; P(x) \wedge nonQ(x) »$$

Exemple formulé dans le langage naturel :

$A =$ « quelque soit l'animal appartenant à l'ensemble des animaux, si l'animal est un lapin alors l'animal est un mammifère »

$\bar{A} =$ « Il existe un animal appartenant à l'ensemble des animaux tel que : l'animal est un lapin et l'animal n'est pas un mammifère »

Exemple formulé dans le langage mathématique :

$$A = « \forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 »$$

$$\bar{A} = « \exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 = 1 \; \wedge \; x \neq 1 »$$

## VIII Tautologies et utopies

On qualifie de **tautologie** une proposition d'exhaustivité vraie pour toutes les occurrences de sa variable. En voici des exemples :

$$A = « \forall x \in \mathbb{R} : \; x + x = 2\,x »$$

$$A = « \forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 \geq 0 »$$

$$A = « \forall x \in \mathbb{R} : \; \exists y \in \mathbb{R} : x < y »$$

On qualifie d'**utopie**, une proposition d'existence fausse pour toutes les occurrences de sa variable. En voici des exemples :

$$A = \text{« } \exists\, x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 = -1 \text{ »}$$

$$A = \text{« } \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 0 \text{ »}$$

## IX Lien entre logique propositionnelle et logique des ensembles

Il y a un lien très étroit entre logique des ensembles et logique des propositions qui tient à ce fait. Considérons deux prédicats $P(x)$ et $Q(x)$ portant sur une variable $x$ d'un ensemble $\mathbb{E}$ et désignons par $S_P$ et $S_Q$ leurs ensembles de solution respectifs, qui rappelons le sont définis par :

$$S_P = \{x \in \mathbb{E} : P(x) \ \ vrai\ \}$$

$$S_Q = \{x \in \mathbb{E} : Q(x) \ \ vrai\ \}$$

Alors nous avons les propriétés évidentes suivantes :

$$S_{P\wedge \boldsymbol{Q}} = S_P \cap S_Q$$

$$S_{P\vee \boldsymbol{Q}} = S_P \cup S_Q$$

$S_{nonP} = \mathbb{E} \backslash S_P = \overline{S_P}$ ( complémentaire de $S_P$ dans $\mathbb{E}$)

Et rappelons le :

$P \Rightarrow Q$ revient à écrire : $S_P \subset S_Q$

$P \Leftrightarrow Q$ revient à écrire : $S_P = S_Q$

Inversement, à tout sous ensemble $A$ d'un ensemble $\mathbb{E}$ peut être associé un prédicat , dont $A$ est l'ensemble de solution :

$$P_A(x) = x \in A$$

Les propriétés vues pour les propositions se transposent donc aux ensembles, comme par exemple, pour deux sous ensembles $A$ et $B$, en désignant leur complémentaire dans $\mathbb{E}$ par une barre :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{AUB} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Ainsi toute propriété démontrée sur des propositions définira une propriété en terme d'ensembles et vice-versa et l'analyse de telles propriétés pourra être rendue automatique (notamment pour le traitement par ordinateur) par le calcul de tables de vérités, ce qui forme la base d'une algèbre dite booléenne et a de nombreuses applications dans la réalisation notamment de circuits électroniques optimisés (tables de Karnaugh)

# X Les principales règles d'équivalence concernant les nombres réels

Voici une liste non exhaustive de règles d'équivalence que tout bon mathématicien devrait connaître les yeux fermés. Elles concernent des nombres mais pourront s'étendre le cas échéant dans leur formalisme à des objets tels que des vecteurs, des fonctions, des matrices, etc.

## 1) Règles d'équations

Règle d'équivalence par addition

$$\forall \ (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathbb{R} \times \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}:$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} <=> \mathrm{a} + \mathrm{c} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$$

Règle d'équivalence par soustraction

$$\forall \ (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathbb{R} \times \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}:$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} <=> \mathrm{a} - \mathrm{c} = \mathrm{b} - \mathrm{c}$$

Règle d'équivalence par multiplication

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*}\ (\text{soit } c\ \neq 0):$$

$$a = b <=> a \times c = b \times c$$

Règle d'équivalence par division

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*}\ (\text{soit } c\ \neq 0):$$

$$a = b <=> \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Ces règles permettent la résolution des équations dites du premier degré

Exemple :

Pour $x \in \mathbb{R}$ :

$5\,x + 1 = x - 9 <=> 5\,x + 1 - x = -9$

(en retranchant $x$ aux deux membres)

$$<=> 5\,x - x = -9 - 1$$

(en retranchant 1 aux deux membres)

On observe que l'effet des deux actions se ramène à passer x et 1 d'un membre vers l'autre en les changeant de signe, ce que l'on appelle **transposition**.

$$<=> 4\,x = -10$$

$$<=> \frac{4\,x}{4} = -\frac{10}{4}$$

(en divisant par 4 les deux membres)

$$<=> x = -\frac{5}{2}$$

<u>Règle du produit nul</u>

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$a \times b = 0 <=> a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Cette règle est à la base de la résolution des équations du second degré et fait apparaître tout l'intérêt de la factorisation, notamment par identité remarquable.

<u>Exemple</u> :

Pour $x \in \mathbb{R}$ :

$x^2 = 4 <=> x^2 - 4 = 0$

$<=> x^2 - 2^2 = 0$

$<=> (x - 2) \times (x + 2) = 0$

$<=> (x - 2) = 0 \text{ ou } (x + 2) = 0$

$<=> x = 2 \; ou \; x = -2$

<u>Règle de l'équation carré</u> :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } a \in \,]0; +\infty[ \; :$$

$$x^2 = a <=> x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } a \in \,]-\infty; 0[ \; :$$

$x^2 =$ a est un prédicat qui n'a pas de solutions

$$x^2 = 0 <=> x = 0$$

## 2) Règles d'inéquations

Règle de comparaison :

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$
$$a < b <=> a - b < 0$$
$$a < b <=> 0 < b - a$$

Noter que cela revient à transposer en changeant de signe.

Cette règle définit la comparaison des nombres relatifs.

Les autres règles s'en déduisent comme nous allons le voir :

Règle d'équivalence par addition

$$\forall\, (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$
$$a < b <=> a + c < b + c$$

Preuve :

$$a < b <=> a - b < 0$$
$$<=> (a + c) - (b + c) < 0$$
$$<=> (a + c\,) < (b + c)$$

Règle d'équivalence par soustraction

$$\forall\, (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$
$$a < b <=> a - c < b - c$$

Preuve :

$$a < b <=> a - b < 0$$
$$<=> (a - c) - (b - c) < 0$$

$$<=> (a - c) < (b - c)$$

Règle d'équivalence par mutiplication

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}+^{*}\quad (\text{soit } c > 0):$$
$$a < 0 <=> a \times c < 0$$
$$a < b <=> a \times c < b \times c$$

Preuve :

La première équivalence est liée à la définition du produit, la deuxième s'en déduit comme nous allons le voir.

$$a < b <=> a - b < 0$$
$$<=> (a - b) \times c < 0$$
$$<=> a\ \times c - b \times c < 0$$
$$<=> a\ \times c < b \times c$$

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}-^{*}\quad (\text{soit } c < 0):$$
$$a < 0 <=> a \times c > 0$$
$$a < b <=> a \times c > b \times c$$

Noter l'inversion du signe de comparaison

Preuve :

Là encore, la deuxième équivalence se déduit de la première

$$a < b <=> a - b < 0$$
$$<=> (a - b) \times c > 0$$
$$<=> a\ \times c - b \times c > 0$$
$$<=> a\ \times c > b \times c$$

Règle d'équivalence par division

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}+^* \quad (\text{soit } c > 0) :$$

$$a < 0 <=> \frac{a}{c} < 0$$

$$a < b <=> \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Preuve :

La première équivalence est liée à la définition du quotient, la deuxième s'en déduit comme nous allons le voir.

$$\begin{aligned} a < b &<=> a - b < 0 \\ &<=> \frac{(a-b)}{c} < 0 \\ &<=> \frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0 \\ &<=> \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{aligned}$$

$$\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}-^* \quad (\text{soit } c < 0) :$$

$$a < 0 <=> \frac{a}{c} > 0$$

$$a < b <=> a \times c > b \times c$$

Noter là encore l'inversion du signe de comparaison

Preuve :

Là encore, la deuxième équivalence se déduit de la première

$$\begin{aligned} a < b &<=> a - b < 0 \\ &<=> \frac{(a-b)}{c} > 0 \\ &<=> \frac{a}{c} - \frac{b}{c} > 0 \end{aligned}$$

$$<=> \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Règle d'équivalence pour le signe d'un produit

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R} :$$

$$a\ b < 0 <=> (a < 0 \text{ et } b > 0) \text{ou } (a > 0 \text{ et } b < 0)$$

$$a\ b > 0 <=> (a < 0 \text{ et } b < 0) \text{ou } (a > 0 \text{ et } b > 0)$$

Cette règle est à l'origine de la méthode du tableau de signe pour résoudre une inéquation produit.

Règle d'équivalence pour les inéquations carré

$$\forall\ (x, a) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R}+^{*} \quad (a > 0) :$$

$$x^2 < a <=> -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$x^2 > a <=> x > \sqrt{a} \text{ ou } x < -\sqrt{a}$$

Notons qu'il est préférable de retenir ces règles à l'aide du graphique de la fonction carré.

$$\forall\ (x, a) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R}-^{*} \quad (a < 0) :$$

$$x^2 < a \qquad \text{n'a pas de solutions}$$

$$x^2 > a \qquad \text{est vrai pour tout x}$$

## XI Les grands types de raisonnement

Nous allons distinguer un nombre très restreint de familles de raisonnement utilisés en logique mathématique :

- Le raisonnement déductif direct
- Le raisonnement déductif par contraposée
- Le raisonnement inductif
- Le raisonnement par l'absurde
- Le raisonnement par disjonctions de cas
- Le raisonnement par récurrence

### 1) Raisonnement déductif direct :

Exemple : Trouver le minimum et le maximum de $y = x^2 + 3\,x - 5$ pour $x \in [2;3]$

Démarche : on part de l'hypothèse sur x et on en déduit une chaîne d'implications en notant que le but cherché est d'encadrer $y$, donc de partir d'un encadrement de $x$.

$$x \in [2;3] \Rightarrow \ 2 \le x \le 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^2 \le x^2 \le 3^2 \\ 3 \times 2 \le 3x \le 3 \times 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ 2^2 + 3 \times 2 - 5 \le x^2 + 3\,x - 5 \le 3^2 + 3 \times 3 - 5$$

$$\Rightarrow \ 5 \le y \le 13$$

Le minimum est donc 5 , et le maximum 13 car ces deux valeurs sont des valeurs possibles de $y$.

Notons que cela revient à évaluer y lorsque x est à son minimum 2 puis à son maximum 3 car y est fonction croissante de x.

Le raisonnement est dit déductif car on part de l'hypothèse $x \in [2;3]$ et on parvient à la conclusion par une chaîne de déductions.

### 2) Raisonnement déductif par contraposée:

## 3) Raisonnement inductif

Soit à démontrer que pour tous nombres a et b positifs, les carrés sont rangés dans le même ordre, autrement dit que la proposition suivante est vraie :

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R} :\ \ 0 \leq a < b => a^2 < b^2$$

Ce qui s'exprime en disant que la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Le raisonnement inductif consiste à partir de la fin pour aboutir si possible par équivalence à une forme qui peut être plus facilement mise en lien avec l'hypothèse :

$$a^2 < b^2 <=> a^2 - b^2 < 0$$

$$<=> (a - b)(a + b) < 0$$

La forme équivalente peut maintenant être déduite de l'hypothèse par raisonnement déductif :

$$0 \leq a < b => a - b < 0 \text{ et } a + b > 0$$

$$=> (a - b)(a + b) < 0$$

## 4) Raisonnement par l'absurde:

Exemple : Prouver qu'il n'existe pas d'entiers naturels n et m tels que :

$$n^2 +\ m^2 = 8755$$

On suppose que de tels entiers existent et on cherche à en déduire un fait absurde.

On raisonne selon la nature paire ou impaire de n et m en envisageant tous les cas possibles :

1^er^ cas : n pair et m pair :

alors :

$$\exists\ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ \ :\ n = 2\ p \text{ et } m = 2\ q$$

donc :

$$n^2 +\ m^2 = 4\ p^2 +\ 4\ \ q^2 = 4\ (\ \ p^2 +\ q^2) =\ 4\ x\ \ \text{avec } x \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc}\quad n^2 +\ m^2 \text{ est divisible par } 4$$

$$\text{or } 8755 \text{ n'est pas divisible par } 4\ \text{, voilà l'absurdité}$$

2eme cas : n pair et m impair

alors :

$$\exists\ (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \ n = 2\,p \text{ et } m = 2\,q + 1$$

donc :

$$n^2 + \ m^2 = 4\,p^2 + \ 4\ \ q^2 + 4q + 1 = 4\,(\ p^2 + \ q^2 + q) + 1 = \ 4\,x\ + 1 \text{ avec } x \in \mathbb{N}$$

donc, le reste de la division de $n^2 + \ m^2$ par 4 est 1, or le reste de la division de 8755 par 4 est 3, voilà l'absurdité.

Ce cas démontre par symétrie le cas $n$ impair et $m$ pair

<u>3ème cas : n impair et m impair</u>

alors :

$$\exists\ (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \ n = 2\,p + 1 \text{ et } m = 2\,q + 1$$

donc :

$$n^2 + \ m^2 = 4\,p^2 + 4\,p + 1 + \ 4\ \ q^2 + 4q + 1 = 4\,(\ p^2 + \ q^2 + p + q) + 2 = \ 4\,x\ + 2 \text{ avec } x \in \mathbb{N}$$

donc, le reste de la division de $n^2 + \ m^2$ par 4 est 2, voilà l'absurdité

## 5) **<u>Raisonnement par disjonction de cas</u>**:

Le fait d'avoir considéré toutes les possibilités de parité pour $n$ et $m$ dans l'exemple précédent consiste en un raisonnement par disjonction de cas. Nous allons en donner un autre exemple.

Soit à montrer que le produit de trois nombres entiers naturels consécutifs est divisible par 3. Notons $n$ le plus petit de ces 3 nombres qui sont alors

$$n, (n + 1), (n + 2)$$

La disjonction de cas consiste à envisager les différents types de nombre $n$ possibles selon le reste de leur division entière par 3.

<u>1er cas : le reste est 0 soit : $n = 3\,p$ avec $p \in \mathbb{N}$</u>

Le produit s'écrit alors :

$$(3\ \mathrm{p})(3\ \mathrm{p}+1)(3\ \mathrm{p}+2) = 3\ \big(\mathrm{p}(3\ \ \mathrm{p}+1)(3\ \mathrm{p}+2)\big) = 3\ \mathrm{x}\ \ \text{avec } \mathrm{x} \in \mathbb{N}$$

Il est donc divisible par 3

2ème cas : le reste est 1 soit : $\mathrm{n} = 3\ \mathrm{p} + 1$ avec $\mathrm{p} \in \mathbb{N}$

Le produit s'écrit alors :

$$(3\ \mathrm{p}+1)(3\ \mathrm{p}+2)(3\ \mathrm{p}+3) = 3\ \big((3\ \ \mathrm{p}+1)(3\ \mathrm{p}+2)(\mathrm{p}+1)\big) = 3\ \mathrm{x}\ \ \text{avec } \mathrm{x} \in \mathbb{N}$$

Il est donc divisible par 3

2ème cas : le reste est 2 soit : $\mathrm{n} = 3\ \mathrm{p} + 2$ avec $\mathrm{p} \in \mathbb{N}$

Le produit s'écrit alors :

$$(3\ \mathrm{p}+2)(3\ \mathrm{p}+3)(3\ \mathrm{p}+4) = 3\ \big((3\ \ \mathrm{p}+2)(\mathrm{p}+1)(3\ \mathrm{p}+4)\big) = 3\ \mathrm{x}\ \ \text{avec } \mathrm{x} \in \mathbb{N}$$

Il est donc divisible par 3

Donc, dans tous les cas, le produit est divisible par 3

## 6) Raisonnement par récurrence :

Ce type de raisonnement est employé pour démontrer qu'un prédicat portant sur une variable, qui est un entier naturel, est vrai sur un sous ensemble de $\mathbb{N}$ qui est généralement un intervalle d'entiers que nous noterons $[\mathrm{n}_0\ ;\ +\infty[$.

Exemple :

Intéressons nous à la somme d'entiers naturels consécutifs impairs :

avec un terme cela donne : 1

avec deux termes : 1 + 3 = 4

avec trois termes : 1 + 3 + 5 = 9

avec quatres termes : 1 + 3 + 5 + 7 = 16

Tiens, tiens, comme c'est intéressant, il semble que la somme soit chaque fois le carré d'un nombre entier naturel. En effet :

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

On est donc amené à formuler une **conjecture** , c'est-à-dire une proposition que l'on pense être vraie a priori, mais dont il va falloir s'assurer qu'elle est telle, par , précisément un raisonnement par récurrence. La conjecture est :

$$\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N} : \text{la somme des n premiers entiers naturels impairs consécutifs vaut } \mathrm{n}^2$$

Cette conjecture fait apparaître le prédicat de la variable $\mathrm{n}$ :

$$\mathrm{P}(\mathrm{n}) = \text{"la somme des n premiers entiers naturels impairs consécutifs vaut } \mathrm{n}^2\text{"}$$

**Pour démontrer la conjecture, on procède dans une première étape à l'initialisation de la propriété**, qui consiste à montrer que $\mathrm{P}(1)$ est vrai. Cela est assuré par :

$$1 = 1^2$$

**La seconde étape, appelée hérédité, consiste à montrer que si $\mathbf{P(n)}$ est vraie pour un entier $\mathbf{n}$ supérieur ou égal à 1, alors $\mathbf{P(n+1)}$ est vrai**. Voyons cela.

Notons $i_1$ , $i_2$ , ... , $i_n$ les $\mathrm{n}$ premiers entiers naturels impairs, nous avons :

$$i_1 = 2 \times 0 + 1,\ \ i_2 = 2 \times 1 + 1, \ldots, i_n = 2\ (\mathrm{n} - 1\ ) +\ 1,$$

Par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire supposant $\mathrm{P}(\mathrm{n})$ vraie, nous avons :

$$i_1 +\ i_2 , + \cdots , + i_n = n^2$$

Notant naturellement $i_{n+1}$ l'entier impair suivant $i_n$ , nous avons :

$$i_{n+1} = 2\,n + 1$$

Ainsi :

$$i_1 +\ i_2 , + \cdots , + i_n + i_{n+1} = n^2 + 2\,n + 1 = (n+1)^2$$

Nous constatons donc que $\mathrm{P}(\mathrm{n}+1)$ est vrai, ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

**L'initialisation et l'hérédité permettent d'assurer que $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ est vrai pour tout entier naturel à compter de l'entier naturel d'initialisation, c'est-à-dire 1**.

Remarque :

Les raisonnements par récurrence font très souvent suite à des conjectures émises à partir de propriétés observées pour les premières valeurs d'un entier $\mathrm{n}$.

Toutefois, les propriétés relatives à une variable entière naturelle n'apparaissent pas forcément de manière intuitive en observant ce qu'il en est pour les premiers entiers. Il n'est qu'à prendre les fameuses propriétés si répandues dans les manuels scolaires :

$$\boxed{\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}}$$

$$\boxed{\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{n}^2 = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)(2\,\mathrm{n}+1)}{6}}$$

Prenons la première, et voyons ce que donne la somme des $\mathrm{n}$ premiers entiers naturels non nuls, pour les premières valeurs de $\mathrm{n}$

$\mathrm{n} = 1 : 1$

$\mathrm{n} = 2 : 1 + 2 = 3$

$\mathrm{n} = 3 : 1 + 2 + 3 = 6$

$\mathrm{n} = 4 : 1 + 2 + 3 + 4 = 7$

Le rapport avec $\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}$ n'est pas du tout évident vu comme cela. Voilà pourquoi le raisonnement par récurrence est de peu d'utilité dans nombre de cas pour établir des formules, contrairement à ce que laisse penser une certaine pédagogie scolaire introduisant à notre sens une confusion. Pour obtenir la formule dont on veut s'assurer la validité pour tout $\mathrm{n}$ par récurrence, il faut une autre méthode, que nous allons présenter et généraliser.

Notons :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

I l est clair que cette somme peut être écrite à l'envers :

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots 1$$

En additionnant les deux formes de $S_n$ en regroupant deux par deux les termes de même position, nous obtenons :

$$2\ S_n = (n+1) = (n-1+2) + (n-2+3) + \cdots (1+n)$$

Soit :

$$2\ S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

Et comme il y a $n$ termes :

$$2\ S_n = n(n+1)$$

Soit finalement :

$$S_n = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

ce qui donne la conjecture. Le raisonnement par récurrence peut alors être fait (si besoin, car la méthode avec les … est suffisamment claire) pour s'assurer que la conjecture est vraie.

Les sceptiques pourront s'entraîner avec des sommes concrètes ajoutées à elles mêmes écrites à l'envers comme :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$S = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$2\ S = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

Les matheux auront remarqué que le procédé s'étend à n'importe quelle somme de termes en progression géométrique, comme :

$$S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25$$

$$S = 25 + 20 + 15 + 10 + 5$$

$$2\ S = 30 + 30 + 30 + 30 + 30$$

et remercieront **Karl Friedrich Gauss** pour avoir défloré le sujet le premier avant l'âge de ses dix ans.

Voyons alors le cas de la somme des $n$ premiers carrés consécutifs et abordons-le dans un esprit de recherche :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Que faire avec cela ?

Une première idée est de regarder s'il y a une relation simple entre cette somme et la somme avec un carré de plus, autrement dit, entre $S_n$ et $S_{n+1}$

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$

Nous avons bien :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

mais cela ne nous fait pas avancer pour autant.

Notons alors que :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2\,n + 1$$

$$\vdots$$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2\,k + 1$$

$$\vdots$$

$$(1+1)^2 = 1^2 + 2\ \times 1 + 1$$

En sommant ces $n$ relations, nous avons :

$$2^2 + 3^2\ \ldots + (n+1)^2 = 1^2 + \cdots n^2 + 2\,(1 + 2 + \cdots n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$

Soit en simplifiant les carrés communs dans les deux membres :

$$(n+1)^2 = 1 + 2\,(1 + 2 + \cdots n) + \ n$$

Soit :

$$2\,(1+2+\cdots n) = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$1+2+\cdots n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Mince, c'est raté ! Nous retrouvons la propriété sur la somme des $n$ premiers entiers vue précédemment, mais pas celle sur la somme des carrés.

En fait, en y regardant de plus près, nous sommes amenés à reproduire le même procédé mais en développant une identité remarquable à une puissance trois :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1$$

$$\vdots$$

$$(k+1)^3 = k^3 + 3\,k^2 + 3\,k + 1$$

$$\vdots$$

$$(1+1)^3 = 1^3 + 3\ \times 1^2 + 3\ \times 1 + 1$$

En sommant ces $n$ relations, nous avons :

$$2^3 + 3^3\ \ldots + (n+1)^3 = 1^3 + \cdots n^3 + 3\,(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + 3(1+2+\cdots+n) + (1+1+\cdots+1)$$

Soit en simplifiant les carrés communs dans les deux membres :

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + +3\ \frac{n\,(n+1)}{2} + n$$

Soit :

$$3\,(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) = (n+1)^3 - 3\ \frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1)$$

On note alors une factorisation par $(n+1)$

$$3\,(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) = (n+1)\ \left((n+1)^2 - \frac{3\,n}{2} - 1\right)$$

On développe

$$3\left(1^2 + 2^2 + \cdots n^2\right) = (n+1)\left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2}\right)$$

On factorise par $n$

$$3\left(1^2 + 2^2 + \cdots n^2\right) = n\,(n+1)\left(n + 2 - \frac{3}{2}\right)$$

On simplifie et au final on obtient la relation cherchée

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$