Corrigé du sujet ICSAP 2020

Exercice 1

a) On constate que $M^2 = M$ donc $f^2 = f$. f est donc un projecteur. Plus précisément, c'est la projection sur $Im(f)$ parallèlement à $ker(f)$.

b) On résout :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -d = 0 \\ -e = -1 \\ -f = -1 \\ -a = -1 \\ -b = 0 \\ b + e = 1 \\ -f = -1 \\ -c = -1 \\ c + f = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = d = 0 \\ e = f = a = c = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

a) On a d'une part par croissance stricte de la fonction exponentielle :

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[\, : e^x > 1, \qquad e^{-x} < 1, \qquad 0 < 1 - e^{-x}$$

Posons d'autre part pour $x \in [0, +\infty[\, : g(x) = 1 - e^{-x} - x$

Alors pour $x \in [0, +\infty[\, : g'(x) = e^{-x} - 1 \leq 0$

g' ne s'annulant qu'en 0, g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi pour $x \in \,]0, +\infty[$:

$$g(x) < g(0)$$

Soit :

$$1 - e^{-x} - x < 0$$

b) Introduisons pour $n \in \mathbb{N}$ la proposition : P_n : "$0 < a_{n+1} < a_n$"

et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$

$$a_1 = 1 - e^{-a_0} < a_0$$

Donc P_0 est vraie

<u>Hérédité</u> : Supposons P_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

Donc :

$$g(0) < g(a_{n+1}) < g(a_n)$$

D'où :

$$0 < a_{n+2} < a_{n+1}$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

c) La série de terme général $(-1)^n\, a_n$ est alternée, son terme général tendant en valeur absolue vers 0 en décroissant. Elle est donc convergente.

d) Le développement limité de e^t en 0 à l'ordre 2 s'écrit :

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}\, t^2 + o(t^2)$$

En faisant $t = -x$ cela donne par composition :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}\, x^2 + o(x^2)$$

D'où un équivalent en 0 :

$$x - (1 - e^{-x}) \sim \frac{1}{2}\, x^2$$

Ainsi

$$a_n - (1 - e^{-a_n}) \sim \frac{1}{2}\, {a_n}^2$$

Soit

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{2}\, {a_n}^2$$

La série de terme général ${a_n}^2$ est donc de même nature que la série de terme général $2(a_n - a_{n+1})$ qui est télescopique donc convergente.

e) Notons d'abord qu'en 0 :

$$1 - e^{-x} \sim x$$

Donc :

$$a_{n+1} \sim a_n$$

Ainsi :

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n\, a_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}\, {a_n}^2}{{a_n}^2} = \frac{1}{2}$$

En utilisant le théorème de Césaro, on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right)}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_0} \sim \frac{1}{a_{n+1}}$$

Donc :

$$\frac{1}{(n+1)\, a_{n+1}} \sim \frac{1}{2}$$

D’où :

$$n\, a_n \sim 2$$

$$a_n \sim \frac{2}{n}$$

Exercice 3

a) En développant par rapport à la deuxième colonne :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & 0 & b \\ 0 & a-X & 0 \\ c & 0 & a-X \end{vmatrix} = (a-X)\,\left((a-X)^2 - b\,c\right)$$

$$= (a-X)\left(a - \sqrt{b\,c} - X\right)\left(a + \sqrt{b\,c} - X\right)$$

b)

1$^{\text{er}}$ cas : $b = c = 0$, A est diagonale donc diagonalisable

2$^{\text{ème}}$ cas : $b = 0, c \neq 0$ ou $b \neq 0, c = 0$. La matrice n’a qu’une valeur propre et n’est pas diagonale, donc n’est pas diagonalisable.

3$^{\text{ème}}$ cas : $b \neq 0, c \neq 0$. La matrice a trois valeurs propres distinctes et est d’ordre 3 donc elle est diagonalisable.

c)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2\,a\,b \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 3\,a^2\,b \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

Faisons un raisonnement par récurrence en supposant que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & n\, a^{n-1}\, b \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^{n+1} = A^n\, A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & (n+1)\, a^n\, b \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

La propriété déjà initialisée pour $n = 1,2,3$ s'hérite.

d)

$$S_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & b + \sum_{k=0}^{n} \frac{k\, a^{k-1}}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} e^a & 0 & b\, e^a \\ 0 & e^a & 0 \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}$$

Exercice 4

a) La forme est

bilinéaire : $g \to < f, g >$ est linéaire pour tout g , $f \to < f, g >$ est linéaire pour tout f

symétrique : $< f, g > = < g, f >$

définie : $< f, f > = 0 \Leftrightarrow f = 0$

positive : $< f, f > \geq 0$

b) g_n est continue (et même de classe C^∞) sur $]0, +\infty[$ par produit. En 0 on a :

$$\lim_{t \to 0^+} t^n\, Ln(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{n} t^n\, Ln(t^n) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{n}\, x\, Ln(x) = 0 = g_n(0)$$

Donc g_n est continue en 0. Elle est donc bien intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. De plus, en faisant une intégration par partie :

$$t^n = u'(t), \qquad Ln(t) = v(t)$$

$$\frac{t^{n+1}}{n+1} = u(t), \qquad \frac{1}{t} = v'(t)$$

on a :

$$\int_0^1 t^n\, Ln(t)dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\, Ln(t)\right]_{t\to 0}^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\, dt = -\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

c) F est un sous espace vectoriel de dimension 2 de base $(f_1 : t \to 1,\ f_2 : t \to t)$. Utilisons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt afin de créer une base orthonormale à partir de cette base.

$$< f_1, f_1 > = \int_0^1 1\, dt = 1$$

Le premier vecteur de base est alors :

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{< f_1, f_1 >}}\, f_1 = f_1$$

Pour le second, on commence par définir un vecteur orthogonal à h_1 comme suit :

$$h'_2 = f_2 - < f_2, h_1 >\ h_1$$

Or :

$$< f_2, h_1 > = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$h'_2 : t \to t - \frac{1}{2}$$

On norme ensuite ce vecteur en définissant :

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{< h'_2, h'_2 >}} h'_2$$

Or :

$$< h'_2, h'_2 > = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\, dt = \left[\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Ainsi :

$$h_2 : t \to 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

d) Le projeté orthogonal de g_1 sur F est :

$$P_F(g_1) = < g_1, h_1 > h_1 + < g_1, h_2 > h_2 = < g_1, h_1 > h_1 + \frac{< g_1, h'_2 >}{< h'_2, h'_2 >} h'_2$$

Or :

$$< g_1, h_1 > = \int_0^1 t\, Ln(t)\, dt = -\frac{1}{4}$$

$$< g_1, h'_2 > = \int_0^1 t\,Ln(t)\,\left(t-\frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 t^2\,Ln(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,Ln(t)dt$$

$$= -\frac{1}{9}+\frac{1}{8}=\frac{1}{72}$$

D'où :

$$P_F(g_1)\,(t) = -\frac{1}{4}+\frac{12}{72}\left(t-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\,t-\frac{1}{3}$$

e) on a :

$$inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^1 \left(a\,t+b-t\,Ln(t)\right)^2 dt\right) = inf_{f\in F}\|f-g_1\|^2 = \|P_F(g_1)-g_1\|^2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{6}\,t-\frac{1}{3}-t\,Ln(t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^1 t^2\,dt + \frac{1}{9}\int_0^1 dt + \int_0^1 t^2\,Ln^2(t)dt - \frac{1}{3}\int_0^1 t^2\,Ln(t)dt - \frac{1}{9}\int_0^1 t\,dt + \frac{2}{3}\int_0^1 t\,Ln(t)dt$$

$$= \frac{1}{108}+\frac{1}{9}+\left[\frac{t^3}{3}\,Ln^2(t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 t^2\,Ln(t)dt + \frac{1}{27}-\frac{1}{18}-\frac{1}{6}$$

$$= \frac{13}{108}+\frac{2}{27}+\frac{1}{27}-\frac{2}{9}=\frac{1}{108}$$

Exercice 5

1) Posons $g(t)=\frac{1}{t}$. Cette fonction étant positive et décroissante sur $[1,+\infty[$ la série de terme général $g(n)$ est du point de vue de la convergence de même nature que l'intégrale $\int_1^X g(t)dt = Ln(X)$ qui tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

2) a) Posons sur $]0,1[$ pour x fixé :

$$f(u)=\frac{1-(1-u)^x}{u}$$

f est continue sur $]0,1[$ et :

$$\lim_{u\to 1^-} f(u) = 1$$

En 0 :

$$f(u)=\frac{1-e^{x\,Ln(1-u)}}{u}\sim -\frac{x\,Ln(1-u)}{u}\sim x$$

Donc f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et le prolongement est intégrable au sens de Riemann sur le même intervalle.

2 b) Posons pour u fixé dans $]0,1[$:

$$\varphi(x) = \frac{1-(1-u)^x}{u} = \frac{1-e^{x\,Ln(1-u)}}{u}$$

φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et :

$$\varphi'(x) = -\frac{Ln(1-u)\,e^{x\,Ln(1-u)}}{u} \geq 0$$

φ est donc croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi si $0 \leq x < y$ alors :

$$\forall u \in]0,1[: \frac{1-(1-u)^x}{u} \leq \frac{1-(1-u)^y}{u}$$

Donc :

$$\forall\,(t,t') \in]0,1[^2 : t < t' \Rightarrow \int_t^{t'} \frac{1-(1-u)^x}{u}du \leq \int_t^{t'} \frac{1-(1-u)^y}{u}du$$

Par passage à la limite en 0 et en 1, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}du \leq \int_0^1 \frac{1-(1-u)^y}{u}du$$

Donc F est croissante sur $[0,+\infty[$

2 c)

$$F(x+1)-F(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^x-(1-u)^{x+1}}{u}du = \int_0^1 (1-u)^x\,\frac{1-(1-u)}{u}du$$

$$= \int_0^1 (1-u)^x\,du = \left[-\frac{(1-u)^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(n)-F(n-1) = \frac{1}{n}$$

Et :

$$\sum_{k=1}^{n}\big(F(k)-F(k-1)\big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Soit, en ayant reconnu une somme télescopique :

$$F(n)-F(0) = H_n$$

D'où, en notant que $F(0)=0$:

$$F(n) = H_n$$

3 a) à x fixé : :

$$\lim_{t \to 0^+} g(x,t) = 0$$

En 1 :

$$g(x,t) = \frac{e^{x\,Ln(t)} - 1}{Ln(t)} \sim \frac{x\,Ln(t)}{Ln(t)} \sim x$$

Donc :

$$\lim_{t \to 1^-} g(x,t) = x$$

La fonction g de la variable t à x fixé est donc prolongeable par continuité en 0 et en 1.

3 b) On a :

$$G(x) = \int_0^1 g(x,t)\,dt$$

g étant une fonction de deux variables continue sur $[0, +\infty[\times [0,1]$ et dérivable par rapport à sa première variable à dérivée continue sur le même domaine avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{Ln(t)\,e^{x\,Ln(t)}}{Ln(t)} = e^{x\,Ln(t)} = t^x$$

Donc G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$G'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}$$

On en déduit , par intégration :

$$G(x) = G(0) + Ln(x+1) = Ln(x+1)$$

4)

$$H_n = F(n) \sim G(n) = Ln(n+1)$$

Donc :

$$H_n \sim Ln(n)$$