VILLE DE
PARIS

Concours externe d'ingénieur·e cadre supérieur·e d'administrations parisiennes
Ouvert à partir du 16 mars 2020 pour 3 postes

Composition de mathématiques

Durée : 3 heures ; coefficient : 3

A lire attentivement avant de traiter le sujet :
Vous ne devez faire apparaître **aucun signe distinctif** dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni votre numéro de convocation ou de table, ni signature ou paraphe.

Aucun référence (nom de service, nom de personne, numéro de téléphone, adresse de service...) **autre que celles figurant le cas échéant sur le sujet**, ne doit figurer dans le corps (ou le timbre) de votre copie sous peine **d'exclusion du concours**.

Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte. Vous ne devez écrire vos nom, prénom et numéro de table que sur l'en-tête de la copie, dans le cadre réservé à cet effet.

Le sujet comporte 5 exercices indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque. Il n'est pas nécessaire de tous les aborder. Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé de traiter les questions dans l'ordre de l'énoncé.

Les candidat·e·s pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser, même s'il·elle·s ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.

Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.

Les calculatrices sont autorisées. Toutefois les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.

Exercice 1

Soit $M=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M dans la base canonique.

a) Calculer M^2. Que peut-on en déduire pour f ? Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

b) Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $M=AB$.

c) Calculer BA.

Exercice 2

On définit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par : $a_0>0$ et, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=1-e^{-a_n}$.

a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $0<1-e^{-x}<x$.

b) Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

c) On considère la série de terme général $(-1)^n a_n$. Est-elle convergente ? Justifier.

d) Déterminer un équivalent de a_n-a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire la nature de la série de terme général a_n^2.

Pour la question suivante, on admettra le théorème suivant (théorème de Cesaro) :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et a pour limite ℓ, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n\geq 0$, $v_n=\dfrac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1}$ est convergente et a pour limite ℓ.

e) Etudier la convergence de la suite de terme général $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$. En déduire un équivalent de a_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, b et c deux éléments de $\mathbb{R}^+$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? (*On distinguera les cas :* $bc > 0$, $bc = 0$.)

c) On suppose $c = 0$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Toujours dans le cas où $c = 0$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Les coefficients de S_n admettent-ils une limite lorsque $n \to +\infty$? On notera S la matrice dont chaque coefficient est la limite du coefficient de mêmes indices de S_n. Donner S.

Exercice 4

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On pose, pour f et g appartenant à E, $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.

b) Soit n un entier strictement positif. Vérifier que la fonction g_n définie sur $[0,1]$ par :
$\begin{cases} \forall t > 0, g_n(t) = t^n \ln t \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$ est continue. Calculer $\int_0^1 t^n \ln t \, dt$.

c) Soit $F = \{t \mapsto at + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2, t \in [0,1]\}$. Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire défini plus haut.

d) Déterminer le projeté orthogonal de g_1 sur F.

e) En déduire $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 \, dt$.

Exercice 5

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Rappeler la limite, finie ou infinie de $(H_n)_{n\geq 1}$. (On ne demande pas de démonstration.)

2.a) Soit x un réel positif ou nul fixé. Montrer que la fonction $u \mapsto \dfrac{1-(1-u)^x}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

On pose, pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^1 \dfrac{1-(1-u)^x}{u} du$.

2.b) Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x+1) - F(x)$. En déduire la valeur de $F(n)$ en fonction de H_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour $x \geq 0$ et $t \in]0,1[$, on pose $g(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln t}$.

3.a) Montrer que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $G(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

3.b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Calculer G' puis G.

4) On admettra que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} G(x)$. En déduire un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.