<u>Exercice</u> 1 :

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -17 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate :

$$A^3 = 2\,A - A^2$$

2) Soit λ une valeur propre de A alors :

$$\exists\, X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : \quad A\,X = \lambda\,X$$

Donc :

$$A^2\,X = A\,A\,X = A\,\lambda\,X = \lambda\,A\,X = \lambda^2\,X$$

$$A^3\,X = \lambda^3\,X$$

Or :

$$A^3 X = 2\,A\,X - A^2\,X$$

Donc :

$$\lambda^3\,X = 2\,\lambda\,X - \lambda^2\,X$$

Soit :

$$(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\,\lambda)\,X = 0$$

Et comme $X \neq 0$:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\,\lambda = 0$$

D'où la relation demandée.

3)

$$x^3 + x^2 - 2\,x = 0 \Leftrightarrow x\,(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\,(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2$$

L'ensemble des valeurs propres de A est donc inclus dans l'ensemble $\{-2,0,1\}$

4)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \Leftrightarrow A\,X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - 5\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x - 4\,y + 2\,z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

Donc :

$$Ker(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A - I) \Leftrightarrow (A - I)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - 5\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x - 5\,y + 2\,z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$Ker(A - I) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A + 2\,I) \Leftrightarrow (A + 2\,I)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\,x - 5\,y + 2\,z = 0 \\ 2\,x - 2\,y + 2\,z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$Ker(A + 2\,I) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

5) P est une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres de A. Ainsi, si on note P_1, P_2, P_3 les 3 colonnes de P , on a :

$$A\,P_1 = 0\,P_1, \quad A\,P_2 = 1\,P_2, \quad A\,P_3 = -2\,P_3$$

Et :

$$A\,P = P\,D$$

Soit, P étant inversible, car les sous espaces propres sont en somme directe :

$$P^{-1}\,A\,P = D$$

6a) Soit $(M, M', \alpha) \in C_k \times C_k \times \mathbb{R}$ alors :

$$A\,M = k\,M\,A\,, \quad AM' = k\,M'A$$

Donc :

$$A\,M + \alpha\,AM' = k\,M\,A + \alpha\,k\,M'A$$

Donc :

$$A\,(M + \alpha\,M') = k\,(M + \alpha\,M')\,A$$

D'où :

$$M + \alpha\,M' \in C_k$$

Donc C_k est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

6b)

$$A\,M = k\,M\,A \Leftrightarrow P\,A\,P^{-1}\,P\,M\,P^{-1} = P\,k\,M\;P^{-1}\,P\,A\,P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D\,N = k\,N\,D$$

7a)

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\d&e&f\\-2\,g&-2\,h&-2\,i\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}0&b&-2\,c\\0&e&-2\,f\\0&h&-2\,i\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0 = k\,b\\0 = -2\,k\,c\\d = 0\\e = k\,e\\f = -2\,k\,f\\-2\,g = 0\\-2\,h = k\,h\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = 0\\0 = 0\\d = 0\\e = 0\\f = 0\\g = 0\\h = 0\end{cases} ou \begin{cases}b = 0\\c = 0\\d = 0\\k = 1\\f = 0\\g = 0\\h = 0\end{cases} ou \begin{cases}b = 0\\c = 0\\d = 0\\e = 0\\f = 0\\g = 0\\k = -2\end{cases} ou \begin{cases}b = 0\\c = 0\\d = 0\\e = 0\\f = 0\\g = 0\\h = 0\end{cases}$$

Ainsi, en notant E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne qui vaut 1 :

$$C'_0 = Vect[E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}] = \left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&i\end{pmatrix} \mid (a,b,c,i) \in \mathbb{R}^4\right\}, dim(C'_0) = 4$$

$$C'_1 = Vect[E_{11}, E_{22}, E_{33}] = \left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&i\end{pmatrix} \mid (a,e,i) \in \mathbb{R}^3\right\}, dim(C'_1) = 3$$

$$C'_{-2} = Vect[E_{11}, E_{33}, E_{32}] = \left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&h&i\end{pmatrix} \mid (a,h,i) \in \mathbb{R}^3\right\}, dim(C'_{-2}) = 3$$

$$C'_{-1} = Vect[E_{11}, E_{33}] = \left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&i\end{pmatrix} \mid (a,i) \in \mathbb{R}^2\right\}, dim(C'_{-1}) = 2$$

7b) Notons que la famille $\left(E_{ij}\right)_{(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)}$ est libre car c'est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons alors que la famille $\left(P\,E_{ij}\,P^{-1}\right)_{(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)}$ est libre.

$$\sum_{(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)} x_{ij}\, P\, E_{ij}\, P^{-1} = 0 \Rightarrow P\left(\sum_{(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)} x_{ij}\, E_{ij}\right) P^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{(1\le i\le 3, 1\le j\le 3)} x_{ij}\, E_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \forall\, (i,j) \in [\![1,3]\!]^2 :\ x_{ij} = 0$$

Donc la famille est libre et donc toute sous partie de cette famille est libre. Or :

$$M \in C_0 \Leftrightarrow P^{-1}\, M\, P \in C'_0$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (a,b,c,i) \in \mathbb{R}^4 \mid \ P^{-1}\, M\, P = a\, E_{11} + b\, E_{12} + c\, E_{13} + i\, E_{33}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (a,b,c,i) \in \mathbb{R}^4 \mid \ M = a\, P\, E_{11} P^{-1} + b\, P\, E_{12} P^{-1} + c\, P\, E_{13} P^{-1} + i\, P\, E_{33}\, P^{-1}$$

On en déduit :

$$C'_0 = Vect[P\, E_{11} P^{-1}, P\, E_{12} P^{-1}, E_{33}, P\, E_{13} P^{-1}, P\, E_{33}\, P^{-1}]$$

De même :

$$C'_1 = Vect[P\, E_{11} P^{-1}, P\, E_{22} P^{-1}, E_{33}, P\, E_{13} P^{-1}]$$
$$C'_{-2} = Vect[P\, E_{11} P^{-1}, E_{33}, P\, E_{32}\, P^{-1}]$$
$$C'_{-1} = Vect[P\, E_{11} P^{-1}, E_{33}, P\, E_{13} P^{-1}]$$

<u>Exercice 2</u> :

1a)

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^{n+1}(t) - sin^n(t)\,)\, dt$$

Posons :

$$f(t) = sin^{n+1}(t) - sin^n(t) = sin^n(t)\,(sin(t) - 1)$$

f est une fonction continue, négative ou nulle et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^{n+1}(t) - sin^n(t)\,)\, dt < 0$$

La suite (a_n) est donc strictement décroissante.

1b) Pour les raisons analogues au 1a) on a : $a_n > 0$.

La suite (a_n) est donc minorée par 0, on en déduit qu'elle est convergente vers une limite $L \ge 0$.

<u>Calcul de la limite</u> :

Soit $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$a_n = \int_0^b sin^n(t)\, dt + \int_b^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt \leq \int_0^b sin^n(b)\, dt + \int_b^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt$$

Donc :

$$a_n \leq b\, sin^n(b) + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

Or à b fixé :

$$\lim_{n\to\infty} b\, sin^n(b) = 0$$

Et par passage à la limite :

$$L \leq \left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

En faisant alors tendre b vers $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$L \leq 0$$

D'où :

$$L = 0$$

2a)

$$b_n = \left[\frac{sin^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n - b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\left(1 - cos(t)\right) dt \geq 0$$

2b)

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ donc par comparaison la série de terme général a_n tend vers $+\infty$

3a) Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n$

La série de terme général $a_n\, 1^n$ diverge donc $R \leq 1$

Soit alors $r \in [0,1[$ alors :

$$0 \leq a_n\, r^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\, sin(t)\right)^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n\, dt = \frac{\pi}{2}\, r^n$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2}\, r^n$ converge donc la série de terme général $a_n\, r^n$ converge et $R \geq 1$ d'où : $R = 1$

3b) La suite (a_n) tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $a_n\ (-1)^n$ est donc une série alternée. Elle est donc convergente. Donc :

$$D = [-1,1[$$

4a) Soit $x \in]-1,1[$ Considérons la suite de fonctions sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par :

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \big(x\, sin(t)\big)^n$$

Cette suite converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(x\, sin(t)\big)^n$$

Montrons que cette convergence est uniforme.

On a :

$$\left|\big(x\, sin(t)\big)^n\right| \leq |x|^n$$

Donc :

$$|f(t) - f_N(t)| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \big(x\, sin(t)\big)^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x\, sin(t)|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x|^n$$

Or $|x| < 1$ donc la série de terme général $|x|^n$ converge donc son reste de rang N tend vers 0.
Donc :

$$\underset{N\to+\infty}{Lim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x|^n = 0$$

La suite de fonctions $\big(f_N(t)\big)$ est donc uniformément convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est ainsi :

$$\underset{N\to+\infty}{Lim} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_N(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt$$

Donc :

$$\underset{N\to+\infty}{Lim} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} \big(x\, sin(t)\big)^n\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(x\, sin(t)\big)^n\ dt$$

Or :

$$\underset{N\to+\infty}{Lim} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} \big(x\, sin(t)\big)^n\ dt = \underset{N\to+\infty}{Lim} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(x\, sin(t)\big)^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(x\, sin(t)\big)^n\, dt = U(x)$$

D'où :

$$U(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\, sin(t)\right)^n \; dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\, sin(t)} \; dt$$

Faisons le changement de variable :

$$u = tan\left(\frac{t}{2}\right), du = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \; dt = \frac{1}{2}\; (1 + u^2)\; dt$$

Avec le changement de bornes :

$$t = 0 \rightarrow u = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$$

$$U(x) = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{2\,x\,u}{1 + u^2}} \; \frac{2}{1 + u^2} \; du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{u^2 - 2\,x\,u + 1} \; du = 2\int_0^1 \frac{1}{(u - x)^2 + 1 - x^2} \; du$$

Faisons le changement de variable :

$$u - x = y, du = dy$$

Avec le changement de bornes :

$$u = 0 \rightarrow y = -x$$

$$u = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

$$U(x) = 2\int_{-x}^{1-x} \frac{1}{y^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} \; dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \left(Arctan\left(\frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + Arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right)$$

Or :

Sur $]0, +\infty[$:

$$Arctan(t) + Arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Sur $]-\infty, 0[$:

$$Arctan(t) + Arctan\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \left(\frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}\right) - \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)\right)$$

$$\boxed{U(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \left(Arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) + Arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\right)}$$

Et à droite en (-1) :

$$U(x) \sim \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}\right) \sim 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to(-1)^+} U(x) = 1$$

4b) Etablissons la continuité à droite de U en (-1) :

Pour $x \in [-1,0]$ la série de terme général $a_n\, x^n$ est alternée. Son reste de rang n peut alors être majoré en valeur absolue de la sorte :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\, x^n\right| \leq |a_{n+1}\, x^{n+1}| = a_{n+1}\, |\, x^{n+1}| \leq a_{n+1}$$

Où :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$$

La série de fonction de terme général $a_n\, x^n$ qui est une fonction continue sur $[-1,0]$ converge donc uniformément sur $[-1,0]$ et sa limite uniforme $U(x)$ est donc continue sur $[-1,0]$. Ainsi :

$$U(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} U(x) = 1$$

1

Exercice 3

1) $f: x \to x + Ln(1-x)\ D_f =]-\infty, 1[$

f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$$

f' est donc négative ou nulle sur $[0,1[$ et ne s'annule qu'en un point isolé 0, donc f est strictement décroissante sur $[0,1[$. De plus :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty\ ,\ \ f(0) = 0$$

Donc f est strictement négative sur $]0,1[$ et en 0 :

$$f(x) = x + (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o((-x)^2)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

2)

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

3)

$$u_n = -\frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim = -\frac{1}{2\,n^2}$$

Or la série de terme général $-\frac{1}{2\,n^2}$ converge donc la série de terme général u_n converge.

4) $g: x \to x - Ln(1+x)\ D_f =]-1, +\infty[$

g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1-x}$$

g' est donc positive ou nulle sur $]0,1]$ et ne s'annule qu'en un point isolé 0, donc g est strictement croissante sur $]0,1]$. De plus :

$$g(0) = 0$$

Donc g est strictement positive sur $]0,1]$ et en 0 :

$$g(x) = x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Or :

$$v_n = g\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

5) On a :

$$v_n = \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim = \frac{1}{2\,n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{2\,n^2}$ converge donc la série de terme général v_n converge.

6)

$$v_1 - u_1 = -Ln(2)$$

Pour $n \geq 2$:

$$v_n - u_n = -Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - Ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -Ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= Ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = Ln\left(\frac{n\,n}{(n+1)\,(n-1)}\right)$$

$$= Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - Ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

On en déduit la somme télescopique pour $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n) = v_1 - u_1 + \sum_{n=2}^{N}(v_n - u_n)$$

$$= -Ln(2) + \sum_{n=1}^{N}\left(Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - Ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = -Ln(2) + Ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - Ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$Ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$$

7) On a :

$\sum_{n=1}^{N} u_n$ est décroissante, $\sum_{n=1}^{N} v_n$ est croissante et :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n - \sum_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} \; Ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes. Elles admettent donc une même limite γ

8) pour $n \geq 2$ on a :

$$A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - Ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + Ln(n-1) = \frac{1}{n} + Ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = u_n < 0$$

Donc la suite(A_n) est strictement décroissante

9) pour $N \geq 2$ on a :

$$\sum_{n=2}^{N}(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=2}^{N} u_n$$

Donc :

$$A_N - A_1 = \sum_{n=2}^{N} u_n$$

$$A_N - A_1 + u_1 = \sum_{n=1}^{N} u_n$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} u_n = A_N, \quad \lim_{N\to\infty} \; A_N = \gamma}$$

Exercice 4 :

1) Sur I et J l'ensemble des solutions est un sous espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel formé par l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = e^t\, y'(e^t)$$

$$g''(t) = e^t\, y'(e^t) + e^{2t}\, y''(e^t) = g'(t) + e^{2t}\, y''(e^t)$$

Or :

$$e^{2t}\, y''(e^t) + a\ e^t\, y'(e^t) + b\, y(e^t) = 0$$

Donc :

$$g''(t) - g'(t) + \ a\, g'(t) + \ b\, g(t) = 0$$

D'où :

$$g''(t) + \ (a-1)\, g'(t) + \ b\, g(t) = 0$$

3) $\forall\, x \in I$:

$$f(x) = g\big(Ln(x)\big)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\, g'\big(Ln(x)\big)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\, g'\big(Ln(x)\big) + \frac{1}{x^2}\, g''\big(Ln(x)\big) = -\frac{1}{x}\, f'(x) + \frac{1}{x^2}\, g''\big(Ln(x)\big)$$

Or :

$$g''\big(Ln(x)\big) + (a-1)\, g'\big(Ln(x)\big) + b\ \ g\big(Ln(x)\big) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{x^2}\, g''\big(Ln(x)\big) + (a-1)\, \frac{1}{x^2}\, g'\big(Ln(x)\big) + b\, \frac{1}{x^2}\ \ g\big(Ln(x)\big) = 0$$

Soit :

$$f''(x) + \frac{1}{x}\, f'(x) + (a-1)\, \frac{1}{x}\, f'(x) + b\, \frac{1}{x^2}\, f(x) = 0$$

D'où :

$$x^2\, f''(x) + a\, x\, f'(x) + b\ \ f(x) = 0$$

4)<u>1er cas : $a = 3, b = 1$</u>

$$z'' + 2\, z' + z = 0 \qquad (E_c)$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 2\, r + 1 = 0$$

de solution unique $r = -1$ donc une base de solution est formée par la famille $(t\, e^{-t}, e^{-t})$. L'ensemble des solutions de (E_c) est alors formé par les fonctions de la forme :

$$g(t) = (c\,t + d\,)e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}, (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

2ème cas : $a = 1, b = 4$

$$z'' + 4\,z = 0 \qquad (E_c)$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 4 = 0$$

de solution unique $r = -2\,i$ et $r = 2\,i$ donc une base de solution à valeurs dans $\mathbb{C}$ est formée par la famille $\left(e^{-2\,i\,t}, e^{-2\,i\,t}\right)$ qui peut être remplacée par la famille $\left(cos(2\,t), sin(2\,t)\right)$ L'ensemble des solutions de (E_c) est alors formé par les fonctions de la forme :

$$g(t) = c\,cos(2\,t) + d\,sin(2\,t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}, (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

5) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = -e^t\,y'(-e^t)$$

$$g''(t) = -e^t\,y'(e^{-t}) + e^{2t}\,y''(-e^t) = g'(t) + e^{2t}\,y''(e^t)$$

Or :

$$e^{2t}\,y''(-e^t) + a(-e^t)\,y'(-e^t) + b\,y(-e^t) = 0$$

Donc :

$$g''(t) - g'(t) + \ a\,g'(t) + \ b\,g(t) = 0$$

D'où :

$$g''(t) + \ (a-1)\,g'(t) + \ b\,g(t) = 0$$

6) $a = 1, b = -4$

6a)

$$x^2\,y'' + \ x\,y' - 4\ \ y = 0 \qquad (E)$$

$$z'' - 4\,z = 0 \qquad (E_c)$$

Solutions de (E_c) :

$$g(t) = c\,e^{2\,t} + d\,e^{-2\,t}\,, \qquad t \in \mathbb{R}, (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

Solutions de (E) sur I :

$$f(x) = c\,e^{2\,Ln(x)} + d\,e^{-2\,Ln(x)} = c\,x^2 + \frac{d}{x^2} \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

Solutions de (E) sur J :

$$f(x) = c\,e^{2\,Ln(-x)} + d\,e^{-2\,Ln(-x)} = c\,x^2 + \frac{d}{x^2} \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

6b) Soit f une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$(c_1, d_1, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4 : \ \forall\, x \in I : f(x) = c_1\, x^2 + \frac{d_1}{x^2}, \qquad \forall\, x \in J : f(x) = c_2\, x^2 + \frac{d_2}{x^2}$$

f admettant une limite à droite et une limite à gauche en 0, on a :

$$d_1 = d_2 = 0$$

f'' admettant une limite à droite et une limite à gauche égales en 0, on a :

$$c_1 = c_2$$

D'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) = c_1\, x^2$$

Réciproquement, on vérifie qu'une telle fonction est bien solution sur $\mathbb{R}$:

$$x^2\, f''(x) + x\, f'(x) - 4\ f(x) = 2\, c_1\, x^2 + x\,(2\, c_1\, x) - 4\, c_1\, x^2 = 0$$

<u>Exercice 5</u>

1) Montrons que la forme est bilinéaire, symétrique définie positive :

- Bilinéaire :

Soit $(f, g, h, \alpha) \in (E)$ alors :

$$(f|g + \alpha\, h) = \int_{-1}^{1} f(t)\,(g + \alpha\, h)(t)\, dt$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt + \alpha \int_{-1}^{1} f(t)\, h(t)\, dt = (f|g) + \alpha\,(f|h)$$

$$(g + \alpha\, h|f) = (f|g + \alpha\, h) = (f|g) + \alpha\,(f|h) = (g|f) + \alpha\,(h|f)$$

- Symétrique

$$(f|g) = (g|f)$$

- Définie :

$$(f|f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \big(f(t)\big)^2\, dt = 0 \Leftrightarrow \forall\, t \in\ [-1,1] :\ \big(f(t)\big)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, t \in\ [-1,1] :\ f(t) = 0$$

car f^2 étant positive ou nulle et continue sur $[-1,1]$

- Positive :

$$(f|f) = \int_{-1}^{1} \big(f(t)\big)^2\, dt\ \geq 0$$

2a) Notons que :

$$(f_0|f_1) = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$$

f_0 et f_1 sont donc orthogonales pour ce produit scalaire. Il suffit donc de les normer pour obtenir une base orthonormale.

Or :

$$(f_0|f_0) = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$$

$$(f_1|f_1) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

Ainsi :

$$\|f_0\| = \sqrt{(f_0|f_0)} = \sqrt{2}$$

$$\|f_1\| = \sqrt{(f_1|f_1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

On définit alors :

$$g_0 = \frac{1}{\|f_0\|} f_0 : t \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 : t \to \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$$

2b)

$$P_F(f) = (f|g_0)\, g_0 + (f|g_1)\, g_1$$

3)

$$(g|g_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} sin(\pi\, t)\, dt = 0 \;\; (fonction\ impaire\ à\ intégrer)$$

$$(g|g_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t\, sin(\pi\, t)\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\left[-\frac{t}{\pi}\, cos(\pi\, t) \right]_{-1}^{1} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} cos(\pi\, t)\, dt \right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\pi} + 0 \right) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

On en déduit :

$$P_F(g) = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t = \frac{3}{\pi}\, t$$

4)

$$m = inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} (\|g - (a\, f_0 + b\, f_1\,)\|^2)$$

m est donc le carré de la distance de g à F. Elle est atteint en un point unique qui est le projeté orhogonal de g sur F et- elle vaut :

$$\|g - P_F(g)\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(sin(\pi\, t) - \frac{3}{\pi}\, t\right)^2 \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(sin(\pi\, t)\right)^2 dt - \frac{6}{\pi}\int_{-1}^{1} t\, sin(\pi\, t)\, dt + \frac{9}{\pi^2}\int_{-1}^{1} t^2\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1 - cos(2\,\pi\, t)}{2}\, dt - \frac{6}{\pi}\,\frac{2}{\pi} + \frac{9}{\pi^2}\,\frac{2}{3}$$

$$= 1 - \frac{6}{\pi^2}$$