PARIS

Concours externe pour l'accès au corps des

Ingénieur·e·s cadres supérieur·e·s d'administrations parisiennes

Ouvert à partir du 25 mars 2019

Composition de mathématiques

(Durée : 4h ; coefficient 3)

A lire attentivement avant de traiter le sujet :
Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni votre numéro de convocation ou de table, ni signature ou paraphe.

Aucune référence (nom de service, nom de personne, numéro de téléphone, adresse de service...), **autre que celles figurant le cas échéant sur le sujet ou dans le dossier**, ne doit figurer dans le corps (ou le timbre) de votre copie sous peine d'exclusion du concours.

Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte
Vous ne devez écrire vos nom, prénom et n° de table qu'en tête de la copie, dans le cadre réservé à cet effet

*Le sujet comporte **7** pages (y compris celle-ci) et est composé de **5** exercices*

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les matrices A^2 et A^3.
Vérifier que $A^3 = 2A - A^2$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ.
Montrer que $\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2$.

3) Trouver les solutions de l'équation :

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de A ?

4) Déterminer $\ker(A)$, $\ker(A - I_3)$ *et* $\ker(A + 2I_3)$.
En déduire que chacune des racines de l'équation de la question 3 est une valeur propre de A et donner pour chaque valeur propre le sous-espace propre associé.

5) On définit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer sans calcul que $P^{-1}AP = D$.

6) Soit k *un réel fixé.*
On définit l'ensemble :

$$C_k = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | AM = kMA\}$$

6a) Montrer que C_k *est un sous-espace vectoriel de* $M_3(\mathbb{R})$.

6b) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.
On lui associe la matrice $N = P^{-1}MP$.
Montrer que $AM = kMA$ *si et seulement si* $DN = kND$.

7) Pour $k \in \mathbb{R}$, *on pose :*

$$C'_k = \{N \in M_3(\mathbb{R}) | DN = kND\}$$

On admettra que C'_k *est un sous-espace vectoriel de* $M_3(\mathbb{R})$.

7a) Déterminer la forme des matrices de C'_0, C'_1, C'_{-2}, *et* C'_{-1}.

7b) Expliquer comment on trouverait une base de C_1 *et une base de* C_{-1}.
On ne demande pas d'expliciter les matrices obtenues.

Exercice 2
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$$

1a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

1b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et trouver sa limite.*

2) On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \cos t \, dt$$

2a) Calculer $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, et préciser le signe de $a_n - b_n$.

2b) Déterminer la nature de la série de terme général a_n.

3) On définit la série entière de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

et on note U sa fonction somme, définie sur l'intervalle D :

$$\forall x \in D, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

3a) Déterminer la valeur du rayon de convergence, noté R, de la série entière précédente.

3b) Montrer que l'ensemble de définition D de la fonction U est : $D = [-R, R[$.

4a) Déterminer une expression de la fonction somme U sur l'intervalle $]-R, R[$.

4b) Justifier la continuité de la fonction U sur l'intervalle de définition D, et préciser la valeur de $U(-R)$.

Exercice 3

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1, \text{ et pour } n \geqslant 2, u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right); v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction :

$$x \mapsto x + \ln(1 - x)$$

Etudier ses variations sur l'intervalle $[0, 1[$.

Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2) Soit n un entier naturel non nul.
Quel est le signe de u_n ?

3) Justifier que la série de terme général u_n est convergente.

4) Etudier la fonction :

$$f:\ x \mapsto x - \ln(1+x)$$

sur l'intervalle $[0,1]$.

5) Justifier que la série de terme général v_n est convergente.

6) Soit n un entier naturel non nul.
Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de n.
En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de l'entier naturel N, pour $N \geqslant 3$.

7) Que peut-on dire des suites $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$?
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.
Dans la suite de l'exercice, on notera γ la somme commune des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

8) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On pourra par exemple considérer $A_n - A_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.

9) Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ en fonction des termes de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite γ.

Exercice 4

Soit a et b deux constantes réelles.
On considère l'équation différentielle :

$$x^2y" + axy' + by = 0 \qquad (E)$$

1) Préciser la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

2) Montrer que si y est solution de (E) sur I, alors, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = y\,(exp(t))$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$z" + (a-1)z' + bz = 0 \qquad (E_c)$$

Indication : on pourra calculer $g'(t)$ et $g"(t)$.

3) Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de E_c sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, f(x) = g(\ln(x))$$

est une solution sur $I =]0, +\infty[$ de (E).

4) Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (E_c) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$.

En déduire, dans chacun de ces cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (E) sur I.

5) Montrer que si y est solution de (E) sur J, alors, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = y(-exp(t))$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_c).

6) On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = -4$.

6a) Donner les solutions de (E) sur I et J.

6b) En déduire l'ensemble des solutions de classe C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On note (E) l'ensemble des fonctions définies et continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

1) Pour tout couple (f,g) d'éléments de (E), on pose :

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur (E).

2) On note f_0 et f_1 les fonctions définies par :

$$\forall t \in [-1,1], f_0(t) = 1, \ \text{ et } f_1(t) = t$$

On pose : $F = Vect(f_0, f_1)$.

2a) Déterminer une base orthonormale (g_0, g_1) de F.

2b) Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un élément f de E sur F, utilisant une base orthonormale de F.

3) Déterminer le projeté orthogonal de $g : t \mapsto \sin(\pi t)$ sur F.

4) En déduire la valeur du réel :

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} (g(t) - (a+bt))^2\ dt\right]$$

On justifiera la méthode utilisée.

FIN DE L'ENONCE