Corrigé sujet 2018

Exercice 1 :

1) Notons tout d'abord que le terme b_{ij} de la matrice $A\,{}^tA$ est le produit scalaire des lignes i et j de A. Or le produit scalaire de deux lignes distinctes de A est nul et le produit scalaire d'une ligne avec elle-même, autrement dit sa norme vaut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Donc :

$$A\,{}^tA = m\,I_4 \Leftrightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m$$

2) On a d'une part :

$$Det(A\,{}^tA) = Det(A)\,Det({}^tA) = Det(A)\,Det(A) = \big(Det(A)\big)^2$$

d'autre part :

$$Det(A\,{}^tA) = Det(m\,I_4) = m^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Il en résulte :

$$\big(Det(A)\big)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 = ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2)^2$$

Or, à b, c, d fixés, $Det(A)$ est un polynôme de degré 4 en a de terme dominant a^4 donc de la forme :

$$Det(A) = a^4 + P(b,c,d)\,a^3 + Q(b,c,d)\,a^2 + R(b,c,d)\,a^1 + S(b,c,d)$$

Où P, Q, R, S sont des polynômes des trois variables b, c, d. Or, si deux polynômes de la variable a ont leurs carrés égaux, alors ils sont égaux ou opposés et s'ils ont en plus même terme dominant, ils sont égaux. Ainsi :

$$\boxed{Det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}$$

3) Distinguons deux cas :

<u>1er cas</u> : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas, $Det(A) \neq 0$ et $rg(A) = 4$

<u>2ème cas</u> : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$

Nous commencerons par une première méthode avant de présenter une seconde méthode plus rapide suggérée par un candidat nommé Richard.

Nous avons $Det(A) = 0$ donc $rg(A) \leq 3$

Or on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

Donc les deux premiers vecteurs colonne de A sont libres et $rg(A) \geq 2$.

Montrons maintenant que le troisième vecteur colonne est lié aux deux premiers en cherchant d'abord un couple (x, y) de complexes tels que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a\,c + b\,d \\ b\,c - a\,d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -c\,(a\,c + b\,d) + d\,(b\,c - a\,d) \\ -d\,(a\,c + b\,d) - c\,(b\,c - a\,d) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a\,c^2 - b\,c\,d + b\,c\,d - a\,d^2 \\ -a\,c\,d - b\,d^2 - b\,c^2 + a\,c\,d \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -a\,(c^2 + d^2) \\ -b\,(c^2 + d^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$x \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

On fait un travail analogue pour montrer que le quatrième vecteur colonne est lié aux deux premiers en cherchant un couple (z, t) tel que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix}$$

On trouve, après calculs :

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a\,d - b\,c \\ b\,d + a\,c \end{pmatrix}$$

Et on vérifie :

$$z \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

Ainsi $rg(A) = 2$

Voyons la seconde méthode, qui sera utile également à la question suivante :

Nous reprenons le début où on constate que les deux premières colonnes de la matrice sont libres donc :

$$2 \leq rg(A)$$

Or nous avons :

$$A\ {}^{t}A = 0$$

Donc :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{4\,1}(\mathbb{C}) : A\ ({}^{t}A\, X) = 0$$

D'où :

$$Im({}^{t}A) = \{{}^{t}A\, X : X \in \mathcal{M}_{4\,1}(\mathbb{C})\} \subset Ker(A)$$

Or, une matrice ayant même rang que sa transposée :

$$Dim\big(Im({}^{t}A)\big) = rg({}^{t}A) = rg(A)$$

Donc :

$$2 \leq rg(A) \leq dim\big(Ker(A)\big)$$

Et, en utilisant le théorème du rang :

$$dim\big(Ker(A)\big) + rg(A) = 4$$

Donc :

$$dim\big(Ker(A)\big) = rg(A) = 2$$

4) Le polynôme caractéristique de A est le déterminant d'une matrice de même forme que A. Donc :

$$P_A(\lambda) = Det(A - \lambda\, I_4) = ((a-\lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines complexes de ce polynôme.

Voyons là encore deux méthodes, la seconde étant plus rapide (celle inspirée par Richard)

<u>1ère méthode</u> :

Distinguons plusieurs cas :

<u>1er cas</u> : $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff (a - \lambda)^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$$

$P_A(\lambda)$ admet alors deux racines distinctes λ_1 et λ_2. Distinguons alors deux sous cas :

<u>Sous-cas 1</u> : $c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas, on a à la fois : $(a - \lambda_1)^2 + b^2 \neq 0$ et $(a - \lambda_2)^2 + b^2 \neq 0$

Or, d'après l'étude faite en 3) le rang de $A - \lambda_1 I_4$ est 2 ou 4

Supposons par l'absurde que ce rang soit 4 alors le noyau de $A - \lambda_1 I_4$, qui est également le sous espace propre associé à λ_1 serait réduit au vecteur nul, ce qui est contradictoire, donc le rang de $A - \lambda_1 I_4$ est 2 et la dimension du sous espace propre E_{λ_1} est 2.

Par un raisonnement analogue, la dimension du sous espace propre E_{λ_2} associé à λ_2 est 2. Ainsi :

$$dim\left(E_{\lambda_1}\right) + dim\left(E_{\lambda_2}\right) = 4$$

Donc A est diagonalisable

<u>Sous-cas 2</u> : $c^2 + d^2 = 0$ soit $c = i\, d$ ou $c = -i\, d$

Dans ce cas $b \neq 0$ et :

$$P_A(\lambda) = 0 \iff (a - \lambda)^2 = -b^2$$

On a donc :

$$\lambda_1 = a - i\, b, \qquad \lambda_2 = a + i\, b$$

<u>Traitons le cas : $c = i\, d$</u> :

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} i\,b & b & i\,d & d \\ -b & i\,b & -d & i\,d \\ -i\,d & d & i\,b & -b \\ -d & -i\,d & b & i\,b \end{pmatrix}$$

On note alors que la deuxième ligne de cette matrice s'obtient en multipliant la première par i. De même la quatrième en multipliant la troisième par $-i$. Le rang de cette matrice est donc le rang de ses deux vecteurs ligne 1 et 3 qui sont libres en considérant les mineurs :

$$\begin{vmatrix} i\,b & b \\ -i\,d & d \end{vmatrix} = 2\, i\, b\, d, \qquad \begin{vmatrix} b & i\,d \\ d & i\,b \end{vmatrix} = i\,(b^2 - d^2)$$

L'un des deux est en effet non nul car $b \neq 0$

Ainsi :

$$rg(A - \lambda_1\, I_4) = 2$$

Une même analyse conduit à :

$$rg(A - \lambda_2\, I_4) = 2$$

Et A est diagonalisable

<u>Traitons le cas : $c = -i\, d$</u> :

$$A - \lambda_1\, I_4 = \begin{pmatrix} i\,b & b & -i\,d & d \\ -b & i\,b & -d & -i\,d \\ i\,d & d & i\,b & -b \\ -d & i\,d & b & i\,b \end{pmatrix}$$

On note alors que la deuxième colonne de cette matrice s'obtient en multipliant la première par $-i$. De même la quatrième en multipliant la troisième par i. Le rang de cette matrice est donc le rang de ses deux vecteurs colonne 1 et 3 qui sont libres en considérant les mineurs :

$$\begin{vmatrix} i\,b & -i\,d \\ -b & -d \end{vmatrix} = -2\,i\,b\,d, \qquad \begin{vmatrix} -b & -\,d \\ i\,d & i\,b \end{vmatrix} = -i\,(b^2 - d^2)$$

L'un des deux est en effet non nul car $b \neq 0$

Ainsi :

$$rg(A - \lambda_1\, I_4) = 2$$

Et de façon analogue :

$$rg(A - \lambda_2\, I_4) = 2$$

Et A est diagonalisable

<u>2ème cas</u> : $b^2 + c^2 + d^2 = 0$

$$P_A(\lambda) = (a - \lambda)^2$$

$P_A(\lambda)$ admet alors une seule racine a

Nous allons montrer qu'il existe une configuration non diagonalisable. Prenons :

$$(a, b, c, d) = (0,1,0, i)$$

On a alors :

$$a^2 + b^2 = 1 \neq 0$$

$$b^2 + c^2 + d^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

A admet pour seule valeur propre 0 et n'est pas la matrice nulle. Elle n'est donc pas diagonalisable. Il semble donc qu'il y ait une erreur d'énoncé

<u>2ème méthode</u> :

1er cas : $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$

Dans ce cas , A admet deux valeurs propres distinctes et en notant que pour une valeur propre λ , la matrice $A - \lambda I_4$ est de même forme que A et de déterminant nul, on en déduit d'après 3) que le rang de cette matrice est 2 et donc que le sous espace propre associé à λ qui est son noyau est de dimension 2. Ainsi la somme des dimensions des deux sous-espaces propres est égale à 4 et A est diagonalisable.

2ème cas : $b^2 + c^2 + d^2 = 0$

Dans ce cas , A admet pour seule valeur propre a et comme le sous- espace propre associé est de dimension 2, elle n'est pas diagonalisable, ce qui confirme l'erreur (ou plutôt l'imprécision) d'énoncé mentionnée précédemment.

5) $(a, b, c, d) = (1,1,1,1)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2\,(A - 3\,I_4)$$

$$\boxed{A^2 = 2\,A - 4\,I_4}$$

6) Introduisons la proposition logique, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$P_p : "\exists\, (a_p, b_p) \in \mathbb{Z}^2 : A^p = a_p\, A + b_p\, I_4"$$

Montrons que P_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence :

<u>Initialisation</u> : pour $p = 0$ et $p = 1$:

$$A^0 = 0\,A + 1\,I_4$$

$$A^1 = 1\,A + 0\,I_4$$

Donc :

$$\boxed{\begin{gathered}(a_0, b_0) = (0,1) \\ (a_1, b_1) = (1,0)\end{gathered}}$$

<u>Hérédité</u> :

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que P_p soit vraie alors :

$$A^{p+1} = A\,A^p = A\left(a_p\,A + b_p\,I_4\right) = a_p\,A^2 + b_p\,A$$

$$= a_p\,(2\,A - 4\,I_4) + b_p\,A = \left(2\,a_p + b_p\right)A - 4\,a_p\,I_4$$

Donc P_{p+1} est vraie en posant :

$$\boxed{\begin{gathered}a_{p+1} = 2\,a_p + b_p \\ b_{p+1} = -4\,a_p\end{gathered}}$$

On en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{p+2} = 2\,a_{p+1} - 4\,a_p$$

L'équation caractéristique de cette relation de récurrence linéaire est :

$$q^2 = 2\,q - 4$$

$$\Leftrightarrow (q-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 2$$

On en déduit :

$$a_p = (A + B\,p)\,2^p$$

A, B étant déterminés par le système :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2\,B = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N} :\ a_p = p\,2^{p-1}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^* : b_p = -4\, a_{p-1} = -4\,(p-1)\, 2^{p-2} = -(p-1)\, 2^p}$$

La formule restant valable pour $p = 0$

Exercice 2

On désignera par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

1) Posons :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f$. On a de plus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad F(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = f(0)$$

2) Commençons par nous assurer que φ a bien ses valeurs dans $\mathbb{E}$.

Soit $f \in \mathbb{E}$ alors $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de deux fonctions continues, g et la fonction $x \to x$. Par construction $\varphi(f)$ est continue en 0, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\varphi(f) \in \mathbb{E}$

Soit $(f, g, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors on a d'une part :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \quad \varphi(f + \alpha\, g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t) + \alpha\, g(t)\big)\, dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt + \alpha\,\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\, dt$$

$$= \varphi(f)(x) + \alpha\, \varphi(g)(x)$$

et d'autre part :

$$\varphi(f + \alpha\, g)(0) = f(0) + \alpha\, g(0) = \varphi(f)(0) + \alpha\, \varphi(g)(0)$$

Donc :

$$\varphi(f + \alpha\, g) = \varphi(f) + \alpha\, \varphi(g)$$

D'où φ linéaire donc endomorphisme de $\mathbb{E}$

3) Soit $f_\lambda \in \mathbb{E}^*$ telle que : $\varphi(f_\lambda) = \lambda\, f_\lambda$ alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \int_0^x f_\lambda(t)\, dt = \lambda\, x\, f_\lambda(x)$$

Soit en dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \ f_\lambda(x) = \lambda\left(f_\lambda(x) + x\, f'_\lambda(x)\right)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \lambda\, x\, f'_\lambda(x) = (1-\lambda)\, f_\lambda(x)$$

Distinguons plusieurs cas :

<u>1er cas : $\lambda = 0$ </u>: On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \ f_\lambda(x) = 0$$

Et par continuité en 0 : $f_\lambda = 0$

Ce qui est absurde

<u>2ème cas : $\lambda = 1$</u> On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \ f'_\lambda(x) = 0$$

Donc f_λ est constante sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est une constante non nulle C sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* :\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x C\, dt = C$$

Et :

$$\varphi(f)(0) = C$$

Donc :

$$\varphi(f) = 1\, f$$

1 est alors une valeur propre de φ et le sous espace propre associé est engendré par la fonction constante égale à 1.

3ème cas : $\lambda \neq 0 \; et \; \lambda \neq 1$: On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \; f'_{\lambda}(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \; \frac{1}{x} \, f_\lambda(x)$$

Ainsi :

$$\exists\, C_1 \in \mathbb{R} : \; \forall\, x \in \left]0, +\infty\right[: \; f_\lambda(x) = C_1 \, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} Ln(x)}$$

$$\exists\, C_2 \in \mathbb{R} : \; \forall\, x \in \left]-\infty, 0\right[: \; f_\lambda(x) = C_2 \, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} Ln(-x)}$$

Supposons par l'absurde : $\lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ alors :

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$$

Et si $C_1 \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$$

Si $C_2 \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f_\lambda(x) = +\infty$$

Ce qui est absurde, donc : $C_1 = 0, C_2 = 0$ et finalement : f_λ est la fonction nulle ce qui est absurde.

Donc : $\lambda \in \;]0,1[$ et :

$$\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[: \; f_\lambda(x) = C_1 \, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

$$\forall\, x \in \left]-\infty, 0\right[: \; f_\lambda(x) = C_2 \, (-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

$$f_\lambda(0) = 0 \; (par \; continuité)$$

Réciproquement : considérons une fonction f_λ de la forme précédente. Alors :

$$\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[: \; \varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x C_1 \, t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \, dt = \frac{C_1}{x} \left[\frac{t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}}{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1} \right]_0^x = \lambda \, \frac{C_1}{x} \, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1} = \lambda \, f_\lambda(x)$$

$$\forall\, x \in \left]-\infty, 0\right[: \; \varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x C_2 \, (-t)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \, dt = \frac{C_2}{x} \left[\frac{t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}}{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1} \right]_0^x = \lambda \, \frac{C_1}{x} \, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}$$

$$= \lambda \, f_\lambda(x)$$

En conclusion, les valeurs propres de φ sont les réels de l'intervalle $]0,1]$ et les fonctions propres associées telles que définies précédemment

4) Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, x_0 \in]0,+\infty[\ :\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ x \geq x_0 \Rightarrow\ s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Ainsi :

$$x \geq x_0 \Rightarrow \int_{x_0}^x \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right)\,dt < \int_{x_0}^x f(t)\,dt < \int_{x_0}^x \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right)\,dt$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0) < \int_{x_0}^x f(t)\,dt < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0)$$

D'où :

$$x \geq x_0 \Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x - x_0}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt < F(x) < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x - x_0}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt < F(x) < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

Donc :

$$\exists\, x_1 \in]x_0,+\infty[\ :\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ x > x_1 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$x > x_1 \Rightarrow s - \frac{\varepsilon}{2} < F(x) < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = s}$$

La réciproque est fausse. Il suffit de prendre : $f(t) = sin(t)$. Cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$ mais :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(1 - cos(x)) = 0$$

<u>Exercice 3</u> :

1) Cherchons un équivalent de f au voisinage de 0 :

$$\forall\, x \in\ ]0,\pi] : f(x) = \frac{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right) - x}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) - x}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{24}\,x^3 + o(x^3)}{2\,x\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Soit :

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{24}\,x^3}{2\,x\,\frac{x}{2}} = -\frac{1}{24}\,x$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Montrons que le prolongement est dérivable.

f est dérivable sur $]0,\pi]$ par inverse puis différence. Reste à étudier la dérivabilité en 0 en étudiant le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \sim = -\frac{1}{24}$$

Donc f est dérivable en 0 et :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{1}{24}}$$

Montrons que f' est dérivable en 0. On

$$\forall\, x \in\ ]0,\pi] :\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\,cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-4\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + x^2\,cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-4\,\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)^2 + x^2\,\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-4\,\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right) + x^2 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{4\,x^2\,sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{x^4}{24}}{4\,x^2\,\frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{24}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{24} = f'(0)}$$

f' est donc continue en 0 et f de classe C_1 sur $[0,\pi]$

2) On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Rappelons l’identité trigonométrique :

$$sin(a) - sin(b) = 2\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

Alors :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\, t\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2 \cos\left((2\, n+2)\, \frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \cos\big((n+1)\, t\big)\, dt = \left[\frac{\sin\big((n+1)\, t\big)}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} :\ I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}}$$

3) Faisons une intégration par partie en posant :

$$\boxed{\begin{gathered} u(t) = \varphi(t),\ \ v'(t) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right) \\ u'(t) = \varphi'(t),\ \ v(t) = -\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right) \end{gathered}}$$

Alors :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right) dt$$

$$= \left[-\frac{\varphi(t)}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \varphi'(t) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right) dt$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \varphi'(t) \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right) dt$$

Or φ' étant continue :

$$\exists\, K \in \,]0, +\infty[\ :\ \forall\, t \in [0, \pi] :\ |\varphi'(t)| \ \leq K$$

Ainsi :

$$\left|\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\, dt\right| \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\, cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\right|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} K\, dt \leq \frac{K\, \pi}{n+\frac{1}{2}}$$

Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \varphi(t)\, sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\, dt = 0$$

4) Commençons par établir l'existence de l'intégrale impropre :

En $+\infty$, on a par intégration par partie :

$$\int_1^X \frac{sin(t)}{t}\, dt = \left[-\,\frac{1}{t}\, cos(t)\right]_1^X - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}\, dt$$

$$= cos(1) - \frac{1}{X} cos(X) + \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}\, dt$$

Or :

$$\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc $\int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}\, dt$ est absolument convergente. De plus $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} cos(X) = 0$ donc $\int_1^X \frac{sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

En 0 il suffit de noter que $\frac{sin(t)}{t} \sim 1$

Pour déterminer la valeur de l'intégrale, appliquons le résultat du 3) avec $\varphi(t) = f(t)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)\, dt = 0$$

D'où on tire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)}{t}\, dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\, t\right)}{2\, sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = I_n = \frac{\pi}{2}$$

Faisons alors pour la première intégrale, le changement de variable :

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) t, \qquad dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right)}{t} dt = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{sin(x)}{\frac{x}{n+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{n+\frac{1}{2}} = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{sin(x)}{x} dx$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4

1) On a :

$$a_0 = \int_0^4 1 \, dt = 4$$

$$a_1 = \int_0^4 t\,(4-t)\, dt = \int_0^4 (4\,t - t^2)\, dt = \left[2\,t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$a_2 = \int_0^4 \left(t\,(4-t)\right)^2 dt = \int_0^4 (16\,t^2 - 8\,t^3 + t^4)\, dt = \left[\frac{16}{3}\,t^3 - 2\,t^4 + \frac{t^5}{5}\right]_0^4$$

$$= 4^3 \left(\frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5}\right) = 4^3 \times 8 \left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{4^3 \times 8}{15} = \frac{512}{15}$$

2) Posons :

$$f(t) = t\,(4-t)$$

f est positive ou nulle sur $[0,4]$ strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,4]$ et $f(1) = f(3) = 3$ donc :

$$\forall\, t \in [1,3] : \ f(t) \geq 3$$

Donc :

$$\forall\, t \in [1,3] : \ f(t)^n \geq 3^n$$

Et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\,dt \geq \int_1^3 \big(t\,(4-t)\big)^n\,dt \geq \int_1^3 3^n\,dt = 3^{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$$

Par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

3) Sur $[0,4]$: $0 \leq f(t) \leq f(2) = 4$ donc $f(t)^n \leq 4^n$ et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\,dt \leq \int_0^4 4^n\,dt = 4^{n+1}$$

4) Soit $0 < h < 2$. Sur $[2,2+h]$: $f(t) \geq f(2+h)$ et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\,dt \geq \int_2^{2+h} \big(f(2+h)\big)^n\,dt = \int_2^{2+h} \big((2+h)\,(2-h)\big)^n\,dt$$

Soit :

$$a_n \geq \int_2^{2+h} (4-h^2)^n\,dt = h\,(4-h^2)^n$$

Ainsi :

$$\boxed{h\,(4-h^2)^n \leq a_n \leq 4^{n+1}}$$

Or, d'une part, une série de terme générale $c\,q^n\,x^n$ avec $q > 0$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{q}$ et d'autre part si deux suites U et V vérifient pour tout entier n : $U_n \leq V_n$ alors les rayons de convergence respectifs R_U et R_V des séries associées vérifient : $R_V \leq R_U$

On déduit donc de l'encadrement précédent, un encadrement du rayon de convergence R de la série de terme général a_n :

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq R \leq \frac{1}{4-h^2}}$$

En faisant tendre h vers 0 on obtient :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

5) Etudions la convergence pour $= \frac{1}{4}$.

<u>Première méthode</u> : en minorant le terme général

On a :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_0^4 \left(\frac{t\,(4-t)}{4}\right)^n \, dt$$

Reprenons pour $0 < h < 2$ la minoration obtenue précédemment :

$$a_n \geq h\,(4 - h^2)^n$$

On en déduit :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq= h\,\left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^n$$

Donc pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{N} h\,\left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^n = h\,\frac{1 - \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^{N+1}}{1 - \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)} = \frac{4}{h}\left(1 - \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^{N+1}\right)$$

Or la série qui est croissante converge soit vers une limite finie L soit vers $+\infty$. Supposons alors par l'absurde qu'elle converge vers L. On aurait , en faisant tendre N vers l'infini pour une valeur fixée de h :

$$L \geq \frac{4}{h}$$

En faisant maintenant tendre h vers 0 on obtient une absurdité.

Donc la série diverge.

<u>Deuxième méthode</u> : en utilisant les intégrales de Wallis

Mettons le polynôme du second degré sous forme canonique :

$$\frac{t\,(4-t)}{4} = t - \frac{1}{4}t^2 = 1 - \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2$$

Et faisons le changement de variable dans l'intégrale :

$$\frac{t}{2} - 1 = sin(x), \qquad \frac{dt}{2} = cos(x)\ dx$$

Il vient :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2(x)\right)^n\ 2\,cos(x)\,dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^2(x)\right)^n cos(x)\,dx$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx$$

D'où en raison de la parité de $cos(x)$

$$\boxed{a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx}$$

Nous reconnaissons une intégrale de Wallis et nous avons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n}}$$

Donc :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \sim \frac{2\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

Or la série de terme général $\frac{2\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ diverge donc, la série de terme général $a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Voyons maintenant la série de terme général $a_n \left(-\frac{1}{4}\right)^n$. Nous allons montrer que son terme général tend en valeur absolue vers 0 en décroissant car les termes de cette série sont alternés.

$$a_{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_0^4 \left(\left(\frac{f(t)}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{f(t)}{4}\right)^n\right)\ dt$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{f(t)}{4}\right)^n \left(\frac{f(t)}{4} - 1\right)\ dt \leq 0$$

La suite $a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est donc décroissante et positive. De plus, l'équivalent précédent montre que son terme général tend vers 0. On peut en déduire que la série de terme général $a_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

Ainsi :

$$D = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$$

6) Présentons là encore deux méthodes pour établir la somme sous forme d'une expression intégrale.

<u>Première méthode</u> : à partir des sommes partielles

On se place dans le cas non trivial $x \neq 0$. Posons pour $x \in D\backslash\{0\}$:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n = \int_0^4 \sum_{n=0}^{N} \big(x\, t\,(4-t)\big)^n\, dt$$

En notant que l'on a sur $[0,4]$:

$$x\, t\,(4-t) < 1$$

On a :

$$f_N(x) = \int_0^4 \frac{1-\big(x\, t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\, t\,(4-t)}\, dt$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{1-x\, t\,(4-t)}\, dt - \int_0^4 \frac{\big(x\, t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\, t\,(4-t)}\, dt$$

Or :

$$\int_0^4 \frac{\big(x\, t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\, t\,(4-t)}\, dt = x^{N+1} \int_0^4 \frac{\big(t\,(4-t)\big)^{N+1}}{x\, t^2 - 4\, x\, t + 1}\, dt$$

Et si $\in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, $x\, t^2 - 4\, x\, t + 1$ est un trinôme présentant un minimum en $t = \frac{4\, x}{2\, x} = 2$ et ce minimum est égal à ::

$$x \times 2^2 - 4\, x \times 2 + 1 = 1 - 4\, x > 0$$

Ainsi

$$0 \leq \int_0^4 \frac{\left(x\, t\, (4-t)\right)^{N+1}}{1 - x\, t\, (4-t)}\, dt \leq \frac{x^{N+1}}{1-4\,x} \int_0^4 \left(t\,(4-t)\right)^{N+1}\, dt = \frac{x^{N+1}}{1-4\,x}\, a_{N+1}$$
$$\leq \frac{1}{1-4\,x} \left(\frac{1}{4}\right)^{N+1} a_{N+1}$$

Et si $\in \left]-\frac{1}{4}, 0\right[$, le tableau de variation du trinôme $g(t) = x\, t^2 - 4\, x\, t + 1$ présentant un maximum en 2 montre que : $\forall\, t \in [0,4] : g(t) = x\, t^2 - 4\, x\, t + 1 \geq g(0) = 1$

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_0^4 \frac{\left(x\, t\, (4-t)\right)^{N+1}}{1 - x\, t\, (4-t)}\, dt \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1} \int_0^4 \left(t\,(4-t)\right)^{N+1}\, dt = |x|^{N+1}\, a_{N+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{N+1} a_{N+1}$$

Donc si $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{4}\right[$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^4 \frac{\left(x\, t\, (4-t)\right)^{N+1}}{1 - x\, t\, (4-t)}\, dt = 0$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \int_0^4 \frac{1}{1 - x\, t\, (4-t)}\, dt$$

L'expression restant valable en 0.

<u>Deuxième méthode</u> : En utilisant la convergence normale

Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ posons : $f_n(t) = \left(x\, t\, (4-t)\right)^n$ et considérons la série de fonctions de terme général $f_n(t)$ qui converge simplement pour $t \in [0,4]$. Montrons que cette convergence est normale :

$$|f_n(t)| = |x\, t\, (4-t)|^n = |x|^n\, |t\, (4-t)|^n = |4\, x|^n \left| \frac{t\,(4-t)}{4} \right|^n \leq |4\, x|^n$$

Or : $|4\, x| < 1$ donc la série de terme général $|4\, x|^n$ converge et la série de terme général $f_n(t)$ converge normalement pour $t \in [0,4]$. Chaque $f_n(t)$ étant intégrable au sens de Riemann sur $[0,4]$, on peut donc intégrer la somme de la série terme à terme, soit :

$$\int_0^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \big(x\, t\,(4-t)\big)^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^4 \big(x\, t\,(4-t)\big)^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

on en déduit pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \int_0^4 \frac{1}{1 - x\, t\,(4-t)}\, dt$$

Pour $x = -\frac{1}{4}$ on montre que l'expression reste valable par la méthode précédente

<u>Calcul de l'intégrale</u> : Mettons le dénominateur sous forme canonique :

$$\int_0^4 \frac{1}{1 - x\, t\,(4-t)}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{t^2 - 4\,t + \frac{1}{x}}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 - 4 + \frac{1}{x}}\, dt$$

distinguons alors deux cas :

1er cas : $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 + \left(\sqrt{\frac{1-4\,x}{x}}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-4\,x}}\left[\tan^{-1}\left((t-2)\sqrt{\frac{x}{1-4\,x}}\right)\right]_0^4$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{2}{\sqrt{x\,(1-4\,x)}}\, \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\,x}{1-4\,x}}\right)}$$

2 ème cas : $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 - \left(\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\,x}\,\left[Ln\left|\frac{t-2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{t-2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right|\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{2\,x}\left(Ln\left|\frac{2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right| - Ln\left|\frac{-2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{-2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right|\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n = \frac{1}{x}\,Ln\left|\frac{2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right|}$$

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et non identiquement nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = f(1-x)$$

Alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par composition) et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f''(x) = -f'(1-x) = -f\big(1-(1-x)\big) = -f(x)$$

Donc :

$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 :\ \forall x \in \mathbb{R}\ : f(x) = A\,cos(x) + B\,sin(x)$$

Cherchons donc maintenant les solutions de cette forme qui répondent au problème. Pour une fonction de la forme précédente on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ :$$

$$f'(x) = -A\,sin(x) + B\,cos(x)$$

$$f(1-x) = A\,cos(1-x) + B\,sin(1-x)$$

$$= A\,(cos(1)\,cos(x) + sin(1)\ sin(x)) + B\,(sin(1)\,cos(x) - cos(1)\,sin(x))$$

$$= \big(A\ cos(1) + B\,sin(1)\big)\ cos(x) + (-A\ sin(1) - B\ cos(1))\ sin(x)$$

Cette fonction répond donc au problème si et seulement si le couple (A, B) satisfait au système :

$$\begin{cases} A \ cos(1) + B\, sin(1) = B \\ A \ sin(1) - B \ cos(1) = -A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \ cos(1) + B\ (sin(1) - 1) = 0 \\ A\ (1 + sin(1)) - B \ cos(1) = 0 \end{cases}$$

Or le déterminant de ce système en (A, B) est :

$$-cos^2(1) - (1 + sin(1))\ (sin(1) - 1) = -cos^2(1) + 1 - sin^2(1) = 0$$

Donc le système équivaut à une de ses équations, par exemple la seconde :

$$B = A\ \left(\frac{1 + sin(1)}{cos(1)}\right)$$

Et les solutions du problème initial sont les fonctions de la forme (incluant la fonction identiquement nulle :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ : f(x) = A\left(cos(x) + \frac{1 + sin(1)}{cos(1)}\ sin(x)\right), \qquad A \in \mathbb{R}$$

Notons que :

$$f(x) = \frac{A}{cos(1)}\big(cos(x)\ \ cos(1) + \ sin(x)\, sin(1) + sin(x)\big)$$

$$C\ \big(cos(x - 1)\ + sin(x)\big)$$

Et les solutions du problème initial deviennent les fonctions de la forme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ : f(x) = C\ \big(cos(x - 1)\ + sin(x)\big), \qquad C \in \mathbb{R}}$$