2018

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère quatre nombres complexes a, b, c, d tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

1) Déterminer un scalaire m, en fonction de a, b, c, d, tel que :

$$A\,{}^tA = mI_4$$

(On rappelle que ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, et I_4 désigne la matrice unité d'ordre 4.)

2) En déduire une expression de $\det(A)$ en fonction de a, b, c, d.

3) Montrer que $rg(A)$ est égal à 2 ou 4 et préciser votre réponse.

4) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

5) On suppose que $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer qu'il existe deux scalaires r et s tels que :

$$A^2 = rA + sI_4$$

et déterminer r et s.

6) Plus généralement, montrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = a_p A + b_p I_4$$

et déterminer des expressions de a_p et b_p en fonction de l'entier naturel p.

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$$

1) Montrer que F a une limite ℓ en 0, èt préciser cette limite en fonction de f.

On pose $F(0) = \ell$.

On obtient ainsi une fonction F définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall f \in E, \varphi(f) = F$$

est un endomorphisme de E.

3) Soit λ un réel quelconque.

Déterminer les fonctions f_λ de E, différentes de la fonction nulle, telles que

$$\varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

4) On suppose que la fonction f a une limite finie s en $+\infty$.

Montrer que la fonction F a également une limite finie, que l'on précisera, en $+\infty$.

Montrer que la réciproque est fausse : exhiber une fonction f qui n'a pas de limite finie en $+\infty$, telle que la fonction F associée ait une limite finie en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,\pi],\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1) Montrer que f est prolongeable sur $[0,\pi]$ en une fonction de classe C^1, que l'on notera aussi f.

2) Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

Calculer I_0.

Comparer I_{n+1} et I_n.

En déduire I_n en fonction de l'entier n.

3) Montrer que si φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$, alors, la suite J_n définie par :

$$J_n = \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\, dt$$

admet pour limite 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$.

4) Justifier alors l'existence et le calcul de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Exercice 4

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^4 [t(4-t)]^n \, dt$$

1) Calculer a_0, a_1, a_2.

2) Montrer que a_n tend vers $+\infty$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 4^{n+1}$$

On considère alors la série entière de la variable réelle x définie par son terme général u_n ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

4) Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi définie.

5) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que la série $\sum a_n x^n$ soit convergente.

6) Déterminer la fonction somme f de cette série entière, en fonction des fonctions usuelles.

La fonction somme f est définie par :

$$\forall x \in D, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exercice 5

Déterminer les fonctions réelles d'une variable réelle f, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1-x)$$

FIN DE L'ENONCE