MAIRIE DE PARIS

CONCOURS PUBLIC

POUR L'ACCES AU CORPS DES INGENIEURS DES SERVICES TECHNIQUES

de la ville de Paris

ouvert à partir du 20 mars 2017

pour 2 postes

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Le sujet comporte 4 pages avec 5 exercices indépendants

Durée : 4h - Documents non autorisés

Coefficient : 3

A LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :

. Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni votre numéro de convocation ou de table, ni signature ou paraphe.

. Aucune référence (nom de service, nom de personne, numéro de téléphone, adresse de service...), **autre que celles figurant le cas échéant sur le sujet ou dans le dossier,** ne doit figurer dans le corps (ou dans le timbre) de votre copie sous peine d'exclusion du concours.

. Les feuilles de brouillon et l'une quelconque des pages du sujet ne seront en aucun cas prises en compte.

Vous ne devez écrire vos nom, prénom et n° de table qu'en tête de la copie, dans le cadre réservé à cet effet.

Il appartient au (à la) candidat(e) de vérifier qu'il (qu'elle) dispose de l'ensemble des pieces

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_3$; $e'_2 = e_1 + e_2$; $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$
1) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E, et déterminer la matrice A' de u par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
2) Montrer que $(A' - I_3)^3$ est la matrice nulle.
(I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3).
En déduire que $(A - I_3)^3$ est la matrice nulle.
3) Déterminer une expression de A^n, où n désigne un entier naturel quelconque.
On pourra utiliser la matrice N réalisant l'égalité $A = I_3 + N$.

Exercice 2

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et on note $I = [a, b]$.
On note f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur I et à valeurs dans I.
On s'intéresse à l'ensemble F des réels x de I tels que $f(x) = x$.
1) Montrer à l'aide d'un exemple qu'il est possible que l'ensemble F soit vide.
2) Montrer que pour tout couple de réels $\{c, d\}$ tel que $a \leqslant c < d \leqslant b$, il existe une fonction f telle que $F = [c, d]$.
Une telle fonction f réalisant cette condition est-elle unique ?
3) On suppose que la fonction f est décroissante.
Montrer que l'ensemble F est vide ou réduit à un singleton (ensemble à un élément).
4) On suppose que la fonction f est continue.
Montrer que l'ensemble F n'est pas vide.
5) On suppose que la fonction f est croissante.
Montrer que l'ensemble F n'est pas vide.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$$

1) Montrer que f est bien définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) Etudier les variations de f sur D.

3) Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

4) On pose :

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt$$

Montrer que g est bien définie sur D.
Calculer $g(x)$ en fonction du réel x.

5) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et calculer la valeur de ce prolongement en 1.
La fonction f est ainsi prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.
Le prolongement obtenu est-il dérivable sur $[0, +\infty[$?

6) La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4
Soit a *un réel appartenant à* $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^a (\tan(t))^n \, dt$$

1) Montrer que la suite (a_n) *est bien définie, et qu'elle admet une limite finie ou infinie, que l'on précisera, suivant les valeurs du réel* a.

2) Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $a = \frac{\pi}{4}$.
Déterminer une expression simple de $a_n + a_{n+2}$.

3) Montrer que la suite (a_n) *est décroissante.*

4) Déterminer un équivalent simple de a_n *quand l'entier* n *tend vers* $+\infty$.

5) On considère la série entière de terme général u_n *défini par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

Déterminer l'ensemble D *des réels* x *pour lesquels la série de terme général* $u_n(x)$ *est convergente.*
On pose alors :

$$\forall x \in D, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Calculer $U(x)$ *en fonction du réel* x *à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 5

On considère la suite de polynômes Q_n ainsi définie :

$$Q_0[X] = 1 \ ; \ Q_1[X] = X \ ; \ \forall n \geqslant 2, Q_n[X] = 2XQ_{n-1}[X] - Q_{n-2}[X]$$

1) Calculer les expressions des polynômes $Q_2[X]$, $Q_3[X]$, $Q_4[X]$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \sin[(n+1)t] = \sin t \ Q_n(\cos t)$$

3) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, et l'application φ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

4) Montrer que les polynômes Q_n sont deux à deux orthogonaux pour φ.

5) On note F l'ensemble des polynômes unitaires de degré 4 de E (ainsi, le terme de plus haut degré d'un polynôme quelconque de F est toujours X^4). Montrer qu'il existe un polynôme R unique de F tel que :

$$\forall P \in F, \varphi(P,P) \geqslant \varphi(R,R)$$

et déterminer le polynôme R et la valeur de $\varphi(R,R)$.

FIN DE L'ENONCE