Corrigé sujet 2016

Exercice 1 :

1)

Soit $P \in \mathbb{E}$ posons : $P(X) = a_4\, X^4 + R(X)$ où : $R(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (X^2-1)\left(4\, a_4\, X^3 + R'(X)\right) - (4\,X+1)\left(a_4\, X^4 + R(X)\right)\\ &= X^2\, R'(X) - 4\, a_4\, X^3 - R'(X) - a_4\, X^4 - 4\, X\, R(X) - R(X)\end{aligned}$$

$\Phi(P)$ est donc une somme de polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ donc $\Phi(P) \in \mathbb{E}$

Soit $(P_1, P_2, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\Phi(P_1 + \alpha\, P_2) = (X^2-1)\left(P_1(X) + \alpha\, P_2(X)\right)' - (4\,X+1)\left(P_1(X) + \alpha\, P_2(X)\right)$$

$$= (X^2-1)\, P_1'(X) - (4\,X+1)P_1(X) + \alpha\left((X^2-1)\, P_2'(X) - (4\,X+1)P_2(X)\right)$$

$$\Phi(P_1) + \alpha\, \Phi(P_2)$$

Donc Φest un endomorphisme de $\mathbb{E}$

2) On a :

$$\Phi(1) = -(4\,X+1) = -1 - 4\,X$$

$$\Phi(X) = (X^2-1) - (4\,X+1)\,X = -1 - X - 3\,X^2$$

$$\Phi(X^2) = (X^2-1)(2\,X) - (4\,X+1)\,X^2 = -2\,X - X^2 - 2\,X^3$$

$$\Phi(X^3) = (X^2-1)(3\,X^2) - (4\,X+1)\,X^3 = -3\,X^2 - X^3 - X^4$$

$$\Phi(X^4) = (X^2-1)(4\,X^3) - (4\,X+1)\,X^4 = -4\,X^3 - X^4$$

On en déduit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\Phi((X-1)^4) = (X^2-1)\,(4\,(X-1)^3) - (4\,X+1)\,(X-1)^4$$

$$= 4\,(X+1)\,(X-1)^4 - (4\,X+1)\,(X-1)^4$$

$$= (X-1)^4\left(4\,(X+1) - (4\,X+1)\right) = 3\,(X-1)^4$$

Donc $(X-1)^4$ est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 3

4) Soit P vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors :

$$\Phi(P) = \lambda\, P$$

$$(X^2-1)\, P'(X) - (4\,X+1)\, P(X) = \lambda\, P(X)$$

D'où :

$$((-X)^2-1)\, P'(-X) - (4\,(-X)+1)\, P(-X) = \lambda\, P(-X)$$

Posons : $Q(X) = P(-X)$ alors :

$$Q'(X) = -P'(-X)$$

Et :

$$(X^2-1)\big(-Q'(X)\big) - (-4\,X+1)Q(X) = \lambda\, Q(X)$$

Soit :

$$(X^2-1)Q'(X) - (4\,X-1)Q(X) = -\lambda\, Q(X)$$

Finalement :

$$(X^2-1)Q'(X) - (4\,X+1)Q(X) = (-\lambda-2)\, Q(X)$$

Donc :

$$\Phi(Q) = (-\lambda-2)\, Q$$

Q est donc vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $(-\lambda-2)$

Ainsi $(-X-1)^4 = (X+1)^4$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -5

5) On a pour $P \in \mathbb{E}$:

$$\Phi(P) = \lambda\, P \Leftrightarrow (X^2-1)\, P'(X) - (4\,X+1)\, P(X) = \lambda\, P(X)$$

$$\Leftrightarrow (X^2-1)\, P'(X) - (4\,X+1+\lambda)\, P(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \,]1,+\infty[\,:\ (x^2-1)\, P'(x) - (4\,x+1+\lambda)\, P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \,]1,+\infty[\,:\ P'(x) - \frac{4\,x+1+\lambda}{x^2-1}\, P(x) = 0$$

Or, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{4\,x+1+\lambda}{x^2-1} = \frac{4\,x+1+\lambda}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Avec :

$$a = \frac{5+\lambda}{2}, \qquad b = \frac{-\lambda+3}{2}$$

Ainsi :

$$\Phi(P) = \lambda\, P \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in\,]1, +\infty[\, : \; P(x) = c\, e^{\frac{5+\lambda}{2} Ln(x-1) + \frac{-\lambda+3}{2} Ln(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in\,]1, +\infty[\, : \; P(x) = c\, (x-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}\, (x+1)^{\frac{-\lambda+3}{2}}$$

Sachant que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4, il faut rajouter les conditions :

$$\begin{cases} \dfrac{5+\lambda}{2} = p \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-\lambda+3}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{5+\lambda}{2} + \dfrac{-\lambda+3}{2} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5 + 2\,p \in \mathbb{N} \\ 4 - p \in \mathbb{N} \\ p + 4 - p \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5 + 2\,p \\ p \in [\![0; 4]\!] \end{cases}$$

Nous en déduisons que Φ possède 5 valeurs propres distinctes : $-5, -3, -1, 1, 3$ et chaque sous espace propre associé est de dimension 1 :

$$\mathbb{E}_{-5} = Vect[(X+1)^4]$$

$$\mathbb{E}_{-3} = Vect[(X-1)\,(X+1)]$$

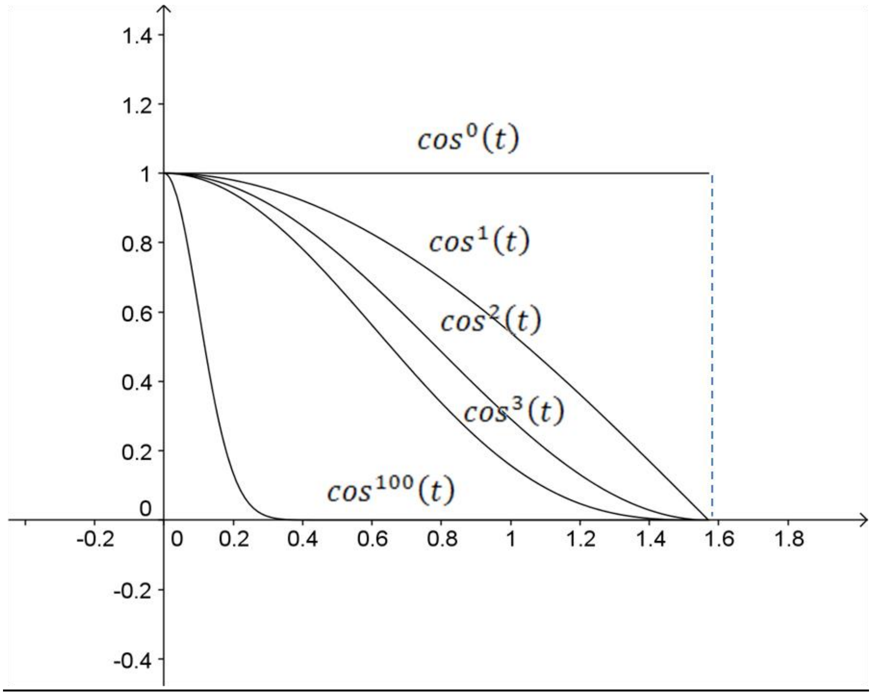
$$\mathbb{E}_{-1} = Vect[(X-1)^2\,(X+1)^2]$$

$$\mathbb{E}_{1} = Vect[(X-1)^3\,(X+1)]$$

$$\mathbb{E}_{3} = Vect[(X-1)^4]$$

Φ est en particulier diagonalisable

Exercice 2



1) On a :

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^0(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^1(t)\, dt = [sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2) Montrons que la suite est décroissante et minorée. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : cos^n(t) \geq 0$$

Donc :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt \geq 0$$

La suite (a_n) est donc minorée par 0.

De plus :

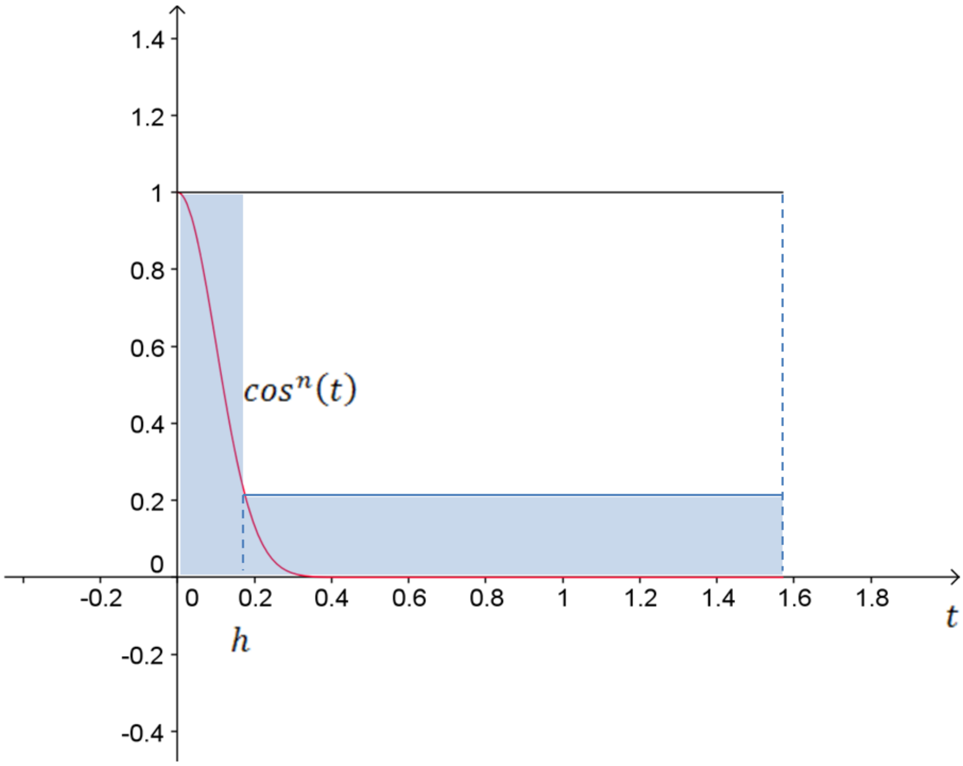
$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : cos^{n+1}(t) - cos^n(t) = cos^n(t)\,(cos(t) - 1) \leq 0$$

Donc :

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^{n+1}(t) - cos^n(t)\right) dt \leq 0$$

La suite (a_n) est donc décroissante. On en déduit qu'elle est convergente.

Pour déterminer sa limite, procédons à une majoration de l'intégrale comme illustré sur la figure :



Soit $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$a_n = \int_0^h cos^n(t)\, dt + \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt$$

Donc :

$$0 \leq a_n \leq \int_0^h 1\, dt + \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(h)\, dt$$

Soit :

$$0 \leq a_n \leq h + \left(\frac{\pi}{2} - h\right) cos^n(h)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ posons :

$$h = min\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

alors , puisque $0 < cos^n(h) < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - h\right) cos^n(h) = 0$$

Donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - h\right) cos^n(h) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\; 0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

3) Comme précédemment, soit $N \in \mathbb{N}$, $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \geq \sum_{n=0}^{N} \int_h^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt = \int_h^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} cos^n(t)\; dt = \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\, dt$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \geq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\, dt - \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\, dt \qquad (1)$$

Or :

$$0 \leq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\, dt \leq cos^{N+1}(h) \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\, dt$$

Et puisque $0 < cos^{N+1}(h) < 1$:

$$\lim_{N\to+\infty} cos^{N+1}(h) \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\, dt = 0$$

Donc par théorème des gendarmes :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{N+1}(t)}{1 - cos(t)}\, dt = 0$$

Or la suite $\sum_{n=0}^{N} a_n$ strictement croissante est soit convergente soit divergente vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite finie L. En passant à la limite dans l'inégalité (1) on aurait :

$$L \geq \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - cos(t)}\, dt$$

Or on a en 0 :

$$\frac{1}{1-cos(t)} \sim \frac{2}{t^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-cos(t)}\ dt = +\infty$$

Ceci est absurde. Donc :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = +\infty}$$

4)

a) Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général a_n. Du 3) on déduit :

$$R \leq 1$$

Soit alors $x \in [0,1[$ alors :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(x\, cos(t)\big)^n\ dt =$$

Posons :

$$b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(x\, cos(t)\big)^n\ dt$$

Alors :

$$|b_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x|^n\ dt = \frac{\pi}{2}|x|^n$$

La série $\sum b_n$ est donc par comparaison absolument convergente. Ainsi :

$$\boxed{R = 1}$$

b) Notons $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de $\sum a_n\ x^n$. On a vu :

$$]-1,1[\ \subset \mathcal{D}$$

Et en 1 la série diverge. Reste à étudier en -1. $\sum a_n\ (-1)^n$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. Le théorème d'Abel montre qu'elle est convergente. Ainsi :

$$\mathcal{D} = [-1,1[$$

5) On a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(x\, cos(t)\big)^k\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} \big(x\, cos(t)\big)^k\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\big(x\, cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\, cos(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\, cos(t)}\, dt - x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\, cos(t)}\, dt$$

Or :

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 0 \leq \frac{1}{1-x\, cos(t)} \leq \frac{1}{1-x}$$

Donc :

$$\left| x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\, cos(t)}\, dt \right| \leq |x|^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\, cos(t)}\, dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(cos(t)\big)^{n+1}\, dt$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(cos(t)\big)^{n+1}\, dt = 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(cos(t)\big)^{n+1}}{1-x\, cos(t)}\, dt = 0$$

Ainsi :

$$U(x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\, cos(t)}\, dt$$

Reste à calculer l’intégrale en faisant le changement de variable :

$$u = tan\left(\frac{t}{2}\right), du = \frac{1+u^2}{2}\, dt$$

Sachant :

$$cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Il vient :

$$U(x) = \int_0^1 \frac{2\ du}{(1+u^2)\left(1 - x\ \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\ du}{1 - x + (1+x)\ u^2}$$

$$= \frac{2}{1-x} \int_0^1 \frac{du}{\dfrac{1-x}{1+x} +\ u^2}$$

$$= \frac{2}{1-x}\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \left[tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ u\right)\right]_0^1$$

finalement

$$\boxed{U(x) = \frac{2}{1-x}\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{U(-1) = 0}$$

Exercice 3

1) On a en 0 :

$$\frac{sin(x\ t)}{e^t - 1} \sim \frac{x\ t}{t} \sim x$$

Donc l’intégrale converge en 0.

En $+\infty$:

$$\left|\frac{sin(x\ t)}{e^t - 1}\right| \leq \frac{1}{e^t - 1} \sim e^{-t}$$

Or l’intégrale de e^{-t} est convergente en $+\infty$ donc l’intégrale de la fonction étudiée est absolument convergente.

2) Introduisons la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{sin(x\ t)}{e^t - 1}\ dt$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction de deux variables sous l'intégrale est continue et admet une dérivée partielle continue par rapport au couple de variables (x, t) sur le domaine $\mathbb{R} \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$. De plus :

$$f_n{}'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt$$

Posons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt$$

g est bien définie car en 0 :

$$\frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1} \sim 1$$

Et en $+\infty$:

$$\left|\frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\right| \leq \frac{t}{e^t - 1} \sim t\, e^{-t}$$

De plus :

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left|\int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt + \int_{n}^{+\infty} \frac{t\, cos(x\, t)}{e^t - 1}\, dt\right| \leq \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{e^t - 1}\, dt + \int_{n}^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$$

La quantité majorante tendant vers 0 indépendamment de x la suite f_n' tend vers g uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = g(x)$$

De plus f_n' étant continue sur $\mathbb{R}$, sa limite uniforme f' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe C_1 sur $\mathbb{R}$

3) On a :

$$f(1) = \int_{0}^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}\, sin(t)}{1 - e^{-t}}\, dt$$

Or :

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\, t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\, t}$$

Donc :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt$$

Justifions l'interversion du signe somme et du signe intégral en considérant :

$$\left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(N+1)\,t}\, sin(t)}{1 - e^{-t}}\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{sin(t)}{1 - e^{-t}} \right| e^{-(N+1)\,t}\, dt$$

Or , la fonction sous valeur absolue dans l'intégrale est bornée sur $[0, +\infty[$ et donc :

$$\exists\, M \in\,]0, +\infty[: \forall\, t \in [0, +\infty[: \left| \frac{sin(t)}{1 - e^{-t}} \right| \leq M$$

Ainsi :

$$\left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)\,t}\, dt = \frac{M}{N+1}$$

On en déduit par comparaison

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-n\,t}\, sin(t)\right) dt$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-n\,t}\,e^{i\,t}\right)dt\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{(-n+i)\,t}\,dt\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{e^{(-n+i)\,t}}{-n+i}\right]_0^{+\infty}\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-i}\right]$$

$$= Im\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+i}{n^2+1}\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}}$$

Exercice 4 :

1) Si f solution alors :

$$f(0+0) = e^0\,f(0) + e^0\,f(0)$$

Donc :

$$f(0) = 2\,f(0)$$

D'où :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

2) Soit (f, g) un couple de solutions et α un réel alors :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2:$$

$$(f+\alpha\,g)(x+y) = f(x+y) + \alpha\,g(x+y)$$

$$= e^x\,f(y) + e^y\,f(x) + \alpha\left(e^x\,g(y) + e^y\,g(x)\right)$$

$$= e^x\,(f+\alpha\,g)(y) + e^y\,(f+\alpha\,g)(x)$$

donc $f+\alpha\,g$ est solution

3) Posons :

$$f(x) = e^x \, g(x)$$

Alors :

$$f \text{ dérivable en } 0 \Leftrightarrow g \text{ dérivable en } 0$$

et :

$$f \text{ solution de } (1) \Leftrightarrow g \text{ solution de } (2)$$

Où (2) est définie par l'équation :

$$e^{x+y} \, g(x+y) = e^x \, e^y \, g(y) + e^y \, f(x) + e^y \, e^x \, g(x)$$

Soit encore :

$$\boxed{g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad (2)}$$

Le problème se ramène donc à la résolution de (2) pour une fonction dérivable en 0

Or si g solution de (2) alors : $g(0) = 0$

Et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to 0} \frac{g(x+y) - g(x)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{g(y)}{y} = g'(0)$$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; g'(x) = g'(0)$$

On en déduit que g est de la forme :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \; g(x) = a\, x}$$

Réciproquement, les fonctions g de la forme précédentes donc linéaires, sont solution de (2) et dérivables en 0.

Les solutions de (1) dérivables en 0 sont alors les fonctions f définies par :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = a\, x\, e^x}$$

<u>Exercice 5</u>

1) Soit $(P, Q) \in \mathbb{E}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

$$N(P) = 0 \Leftrightarrow \; P = 0$$

$$N(\alpha\, P) = |\alpha| N(P)$$

$$\forall\, t \in [-1,1] : \; |P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N(P) + N(Q)$$

Donc :

$$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$$

N est donc une norme sur $\mathbb{E}$

2) Sur $\mathbb{R}_n[X]$ N est équivalente à la norme N' définie par :

$$N'(a_0 + a_1\, X + \cdots + a_n\, X^n) = sup_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|$$

Donc :

$$\exists\ \alpha_n \in \mathbb{R} :\ \forall\ P \in \mathbb{R}_n[X] : N(P) \geq \alpha_n\, N'(P)$$

Or si P est unitaire, $N'(P) \geq 1$ donc :

$$\forall\ P \in \mathbb{F}_n : N(P) \geq \alpha_n$$

3) Il suffit de trouver un polynôme simple de la forme

$$P = (X-a)\,(X+a) = X^2 - a^2$$

Tel que :

$$P(1) < 1$$

Et le suivant convient :

$$\boxed{P = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right) = X^2 - \frac{1}{4}}$$

4) Considérons la suite de polynômes unitaires :

$$\boxed{P_n = \left(X^2 - \frac{1}{4}\right)^n}$$

On a :

$$N(P_n) = \left(P_n(1)\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} N(P_n) = 0$$