Exercice 5

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que l'application N définie par :

$$\forall P \in E, N(P) = \underset{t\in[-1,1]}{Sup} |P(t)|$$

est une norme sur E.

2) On appelle polynôme unitaire tout polynôme non nul dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.
Soit n un entier naturel, et soit F_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe un réel α_n strictement positif tel que :

$$\forall P \in F_n, N(P) \geqslant \alpha_n$$

Il est ainsi possible de définir une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser le fait que sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, toutes les normes sont équivalentes.

3) Exhiber un polynôme P unitaire de degré 2 tel que $N(P) < 1$.

4) Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) unitaires de E, convergente et ayant pour limite le polynôme nul.
Montrer qu'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme à la question 2 converge nécessairement vers 0.

FIN DE L'ENONCE