Exercice 3

1) Justifier l'existence de la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$$

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que :

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 4

Il s'agit de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) \quad (1)$$

1) Soit f une application vérifiant (1). Déterminer $f(0)$.

2) Montrer que l'ensemble des applications qui vérifient (1) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si la fonction f vérifie (1), elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.

4) En déduire toutes les solutions du problème.