5) Déterminer les valeurs propres de Φ, et les vecteurs propres associés. Pour cela, on cherchera les scalaires λ tels qu'il existe un polynôme P non nul tel que $\Phi(P) = \lambda P$, et on se ramènera à une équation différentielle.
On choisira ensuite la valeur de λ de sorte que l'équation différentielle ait une solution polynômiale non nulle.

Exercice 2
On considère la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

1) Calculer a_0 et a_1.

2) Montrer que la suite (a_n) est convergente et trouver sa limite.

3) Montrer que la série de terme général a_n est divergente.

4) On considère la série entière de la variable réelle x de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

a) Déterminer son rayon de convergence.
b) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que la série de terme général $u_n(x)$ soit convergente.

5) On définit alors la fonction somme U de la série entière précédente par :

$$\forall x \in D, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Déterminer une expression de $U(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
On déterminera en particulier la valeur de $U(-1)$.