

N.B :

Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.

Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.

Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.

Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, et l'application Φ qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = \Phi(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P .

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E .

2) Donner la matrice de Φ par rapport à la base canonique \mathcal{B} de E , soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$.

3) Montrer que $(X - 1)^4$ est un vecteur propre de Φ et préciser la valeur propre associée.

4) Montrer que si P est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(-X)$$

est vecteur propre de Φ associé à une valeur propre dont on donnera l'expression en fonction de λ .

En déduire alors un deuxième vecteur propre de Φ , et la valeur propre associée.