Corrigé sujet 2013

Exercice 1 :

1)

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre non nul associé, alors :

$$A\,X = \lambda\,X$$

$$A^2\,X = \lambda^2\,X$$

$$(A^2 - 2\,A + 4\,I_n)\,X = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 4)\,X$$

Donc :

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 4 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$$

donc $\lambda \notin \mathbb{R}$

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A n'a donc pas de racines réelles. Il est donc de degré pair. Comme son degré est l'ordre de A, on en déduit que n est pair.

Prouvons par l'absurde que A n'est pas proportionnelle à I_n en supposant qu'il existe un réel k tel que : $A = k\,I_n$. Alors :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = (k^2 - 2\,k + 4)\,I_n$$

Donc :

$$k^2 - 2\,k + 4 = 0$$

Ce qui est absurde puisque ce trinôme n'a pas de racine réelle.

b) Montrons que l'on a :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$$

$(\Rightarrow)$ Supposons $A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$ alors $X^2 - 2\,X + 4$ est un polynôme annulateur de

A et comme il n'existe pas de polynôme annulateur de plus bas degré, c'est le polynôme minimal $m_A(X)$ de A. $P_A(X)$ qui est un multiple de $m_A(X)$ et de coefficient dominant égal à 1 est donc égal à $m_A(X)$

$(\Leftarrow)$ Supposons $P_A(X) = X^2 - 2\,X + 4$ alors d'après le théorème de Cayley Hamilton :

$$P_A(A) = 0$$

donc :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0$$

De plus, on a :

$$P_A(X) = X^2 - Tr(A)\,X + \det(A)$$

D'où :

$$A^2 - 2\,A + 4\,I_n = 0 \Leftrightarrow Tr(A) = 2, \det(A) = 4$$

Considérons des matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 2-a \end{pmatrix}$$

Elles ont une trace égale à 2. On a alors :

$$det(A) = 4 \Leftrightarrow -\,a^2 + 2\,a - b\,c - 4 = 0$$

Le trinôme en a a pour discriminant :

$$\Delta = 4 - 4\,(b\,c + 4) = 4\,(-\,b\,c - 3)$$

Prenons alors $c = -1$ et $b > 3$, le discriminant est alors strictement positif et le trinôme a au moins une racine réelle a. Il y a donc une infinité de matrices vérifiant (1)

2)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$$

a) $Tr(A) = 8 - 6 = 2,\ det(A) = -48 + 52 = 4$
b) Montrons par une récurrence forte sur k :

$$P(k) = \text{"}\ U_k = A^k\ \text{"}$$

<u>Initialisation</u> pour $k = 0$ et $k = 1$

$$U_0 = I_2$$

$$A^0 = I_2$$

$$U_1 = A$$

$$A^1 = A$$

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $P(q)$ soit vraie pour tout entier naturel q inférieur ou égal à k alors :

$$U_{k+1} = 2\,U_k - 4\,U_{k-1} = 2\,A^k - 4\,A^{k-1} = (2\,A - 4\,I_2)\,A^{k-1} = A^2\,A^{k-1} = A^{k+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie, ce qui démontre la propriété pour tout entier naturel k

3)

$$M_p(x) = x^p\,U_p \quad , \quad S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} x^k\,U_k$$

a) On a pour tout couple de réels (y, z)

$$(I_2 - x\,A)\,(y + z\,A) = y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,A^2$$

$$= y\,I_2 + (z - x\,y)\,A - x\,z\,(2\,A - 4\,I_2)$$

$$= (y + 4\,x\,z)\,I_2 + (z - x\,y - 2\,x\,z)\,A$$

Montrons alors qu'on peut déterminer ce couple tel que :

$$\begin{cases} y + 4\,x\,z = 1 \\ z - x\,y - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z - x\,(1 - 4\,x\,z) - 2\,x\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 4\,x\,z \\ z\,(4\,x^2 - 2\,x + 1) = x \end{cases}$$

Or le trinôme $4\,x^2 - 2\,x + 1$ a un discriminant strictement négatif donc ne s'annule pas. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} y = 1 - \dfrac{4\,x^2}{4\,x^2 - 2\,x + 1} = \dfrac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \\ z = \dfrac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1} \end{cases}$$

Ceci prouve que la matrice $I_2 - x\,A$ est inversible et que son inverse est :

$$(I_2 - x\,A)^{-1} = \frac{-2\,x + 1}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\;I_2 + \frac{x}{4\,x^2 - 2\,x + 1}\;A$$

b) Déterminons, pour la relation de récurrence (3) les solutions de la forme :

$$U_k = r^k\, I_2$$

en écrivant pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$r^k\, I_2 = 2\, r^{k-1}\, I_2 - 4\, r^{k-2} I_2$$

Ce qui équivaut, après division par r^{k-2} et élimination de I_2 à :

$$r^2 = 2\, r - 4$$

soit :

$$r^2 - 2\, r + 4 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4 - 16 = -12 = \left(2\, i\, \sqrt{3}\right)^2$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{2 - 2\, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, \frac{1 - \ i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$r_2 = \frac{2 + 2\, i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, \frac{1 + \ i\, \sqrt{3}}{2} = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

La solution générale de l'équation (3) est donc :

$$U_k = {r_1}^k\, B + {r_2}^k\, C$$

où B et C sont deux matrices définies par le système :

$$\begin{cases} B + C = I_2 \\ r_1\, B + r_2\, C = A \end{cases}$$

qui se résout par combinaison en :

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\,(A - r_2 I_2) \\ C = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\,(A - r_1 I_2) \end{cases}$$

Ainsi :

$$x^k\, U_k = (2\, x)^k\, \left(e^{-i\, k\, \frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\, k\, \frac{\pi}{3}}\, C\right)$$

Posons : $D_k = e^{-i\, k\, \frac{\pi}{3}}\, B + e^{i\, k\, \frac{\pi}{3}}\, C$

Les quatre coefficients de D_k sont bornés. Une condition suffisante de convergence vers 0 de $x^k\ U_k$ est donc :

$$|2\,x| < 1$$

soit

$$|x| < \frac{1}{2}$$

Et elle est nécessaire. En effet :

Si $x^k\ U_k$ tend vers 0 alors la suite extraite $x^{6\,k}\ U_{6k}$ tend vers 0. Or :

$$x^{6\,k}\ U_{6k} = (2\,x)^{6\,k}\ (B + C)$$

et $B + C$ n'est pas la matrice nulle

donc $(2\,x)^{6\,k}$ tend vers 0 d'où la condition précédente.

c) On a

$$(I_2 - x\,A)\,S_p(x) = I_2 - x^{p+1}\,A^{p+1} = I_2 - U_{p+1}$$

D'où :

$$S_p(x) = (I_2 - x\,A)^{-1} - (I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$$

La suite U_{p+1} tendant vers 0 quand p tend vers l'infini, il est aisé de vérifier que son produit à gauche ou à droite par une matrice constante tend aussi vers 0 et donc que $(I_2 - x\,A)^{-1} U_{p+1}$ tend vers 0. Ainsi $S_p(x)$ tend vers $(I_2 - x\,A)^{-1}$. On peut alors écrire ceci sous une forme analogue à celle pour la somme des termes d'une suite géométrique de réels :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\,A^k = (I_2 - x\,A)^{-1}$$

Exercice 2 :

1) Soit $S(x)$ une fonction développable en série entière. Posons :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que S soit solution de (1) est :

$$\forall\, x \in I : \qquad 2\,x\,(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I : \qquad 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in I : \qquad 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ 2\,a_1 + a_1 - a_0 = 0 \\ \forall\, n \geq 2 : 2\,n\,a_n - 2\,(n-1)\,a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \dfrac{1}{3} \\ \forall\, n \geq 2 : (2\,n + 1\,)\, a_n = (2\,n - 1\,)\, a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1 : \ a_n = \dfrac{2\,n-1}{2\,n+1}\ \ a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1 : \ a_n = \dfrac{2\,n-1}{2\,n+1}\, \dfrac{2\,n-3}{2\,n-1} \dots \dfrac{1}{3} a_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ a_n = \frac{1}{2\,n+1}$$

Or la série de terme général ci-dessus vérifie :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2\,n+2} \times (2\,n+1)$$

soit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

D'après la règle de D'Alembert, son rayon de convergence est 1. Il n'y a donc qu'une solution de (1) développable en série entière au voisinage de 0 qui est la série de rayon de convergence 1 :

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2\,n+1}}$$

Cherchons alors une expression analytique de S. Pour cela posons pour $x > 0$ $y = \sqrt{x}$ soit $x = y^2$, alors :

$$S(x) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

Posons sur $[0,1[$:

$$k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2\,n+1}}{2\,n+1} = S(y^2)$$

k est dérivable sur $[0,1[$ par composition et :

$$k'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2\,n} = \frac{1}{1-y^2}$$

Donc sur $[0,1[$ on a :

$$k(y) = k(0) + \int_0^y \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\,Ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

On en déduit sur $]0,1[$

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\,Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)}$$

Faisons un même travail sur $]-1,0[$ en posant $y = \sqrt{-x}$, soit $x = -y^2$ alors :

$$S(x) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,y^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

Posons sur $[0,1[$:

$$g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, y^{2\,n+1}}{2\,n+1} = S(y^2)$$

g est dérivable sur $[0,1[$ par composition et :

$$g'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n y^{2\,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-y^2)^n = \frac{1}{1+y^2}$$

Donc sur $[0,1[$ on a :

$$f(y) = f(0) + \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = tan^{-1}(y)$$

On en déduit sur $]-1,0[$

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{-x}}\, tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)}$$

et on peut prolonger cette définition par continuité sur $]-1,0]$

2) Pour $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0;1[$ ou $I =]1;+\infty[$ on a :

$$(1) \Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : y' = -\frac{1}{2\,x}\, y + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

Nous sommes en présence d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Pour $I =]0;1[$ ou $I =]1;+\infty[$ la solution générale est de la forme :

$$y(x) = c\, e^{-\frac{1}{2} Ln(x)} + y_P(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} + y_P(x)$$

où c est une constante arbitraire et y_P une solution particulière, que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante en posant :

$$y_P(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{x}}$$

soit :

$$y_P'(x) = \frac{c'(x)\,\sqrt{x} - c(x)\,\dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{c(x)}{2\,x\,\sqrt{x}}$$

Ainsi :

$$y_P \text{ solution de } (1)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{c(x)}{2\,x\,\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\,x}\,\frac{c(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : c'(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\frac{1}{\left(1-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}$$

Soit en posant : $u(x) = \sqrt{x}$

$$\forall\, x \in I : c'(x) = \frac{u'(x)}{1-\left(u(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, x \in I : \ c(x) = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right| + cte = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + cte$$

La fonction y_P suivante répond donc à la question :

$$y_P(x) = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\ Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$$

La solution générale sur I est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\ Ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|}$$

Pour $I =]-\infty; 0[$ la solution générale est de la forme :

$$y(x) = c\,e^{-\frac{1}{2}Ln(-x)} + y_P(x) = \frac{c}{\sqrt{-x}} + y_P(x)$$

où c est une constante arbitraire et y_P une solution particulière, que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante en posant :

$$y_P(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{-x}}$$

soit :

$$y_P'(x) = \frac{c'(x)\sqrt{-x} - c(x)\frac{(-1)}{2\sqrt{-x}}}{\left(\sqrt{-x}\right)^2} = \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} - \frac{c(x)}{2\,x\sqrt{-x}}$$

Ainsi :

$$y_P \text{ solution de } (1)$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} - \frac{c(x)}{2\,x\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2\,x}\frac{c(x)}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : \frac{c'(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\,x\,(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I : c'(x) = \frac{(-1)}{2\sqrt{-x}}\frac{1}{\left(1+\left(\sqrt{-x}\right)^2\right)}$$

Soit en posant : $u(x) = \sqrt{-x}$

$$\forall\, x \in I : c'(x) = \frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in I :\ c(x) = tan^{-1}\left(u(x)\right) + cte = tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right) + cte$$

La fonction y_P suivante répond donc à la question :

$$y_P(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

La solution générale sur $]-\infty; 0[$ est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)}$$

3) Notons qu'en faisant $x = 0$ dans l'équation (1) toute solution vérifie $y(0) = 1$. De plus elle vérifie d'après ce qui précède :

sur $]-\infty; 0[$:

$$y(x) = \frac{c_1}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{-x}\right)$$

sur $]0; 1[$:

$$y(x) = \frac{c_2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Or :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{-x}} \ tan^{-1}\big(\sqrt{-x}\big) = 1$$

et en 0 :

$$\frac{1}{2\,t} \ Ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \sim \frac{1}{2\,t} \ \left(\frac{1+t}{1-t} - 1\right) \sim \frac{1}{2\,t} \ \frac{2\,t}{1-t} \sim \frac{1}{1-t}$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 1$$

La solution y devant avoir une limite à gauche et une limite à droite finie en 0, cela impose :

$$c_1 = c_2 = 0$$

D'où la solution unique sur $]-\infty; 1[$ définie par :

sur $]-\infty; 0[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \ tan^{-1}\big(\sqrt{-x}\big)$$

sur $]0; 1[$:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

et :

$$y(0) = 1$$

4) L'étude faite au 1) a montré que que la solution précédente était développable en série entière sur $]-1; 1[$ donc C^∞ sur ce même intervalle. Posons alors :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \ tan^{-1}\big(\sqrt{-x}\big)$$

h est C^∞ sur $]-\infty; 0[$ et coïncide avec f sur cet intervalle donc f est C^∞ sur $]-\infty; -0{,}5[$ et donc sur $]-\infty; 1[$

Exercice 3

1)
a) Domaine de définition de θ : $D = \mathbb{R}$
b) Recherche du domaine d'étude par symétries : On a :

$$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$$

Donc la courbe peut être entièrement tracée sur un intervalle de longueur 2π

$$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$$

Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$.

Il suffit donc de faire l'étude sur $[0, \pi]$

c) Variations de $\rho(\theta)$. On a :

$$\rho'(\theta) = -sin(\theta)$$

On en déduit le tableau de variation :

θ	0		π
ρ'	0	-	0
ρ	2	↘	0

Afin de tracer la courbe à partir de ce tableau, rappelons que le point $M(\theta)$ est défini par :

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$$

Où :

$$\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

Auquel est associé son vecteur dérivé :

$$\vec{v}(\theta) = \vec{u}'(\theta) = -sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$

De telle sorte que l'on a :

$$\vec{t}(\theta) = \left(\overrightarrow{OM(\theta)}\right)' = \rho'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{v}(\theta)$$

Ainsi, la tangente $T(\theta)$ à la courbe au point $M(\theta)$ est dirigée par $\vec{t}(\theta)$ lorsqu'il n'est pas nul. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$ nous avons affaire à un point stationnaire pour lequel la tangente a pour vecteur directeur $\vec{u}(\theta)$.

Le tableau fait apparaitre un point stationnaire en π. La tangente en ce point a pour vecteur directeur $\vec{u}(\pi) = -\vec{\imath}$

Il est utile de déterminer les tangentes remarquables parallèles aux axes coordonnées. Pour cela calculons les coordonnées de $\vec{t}(\theta)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$-sin(\theta) \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} + \big(1 + cos(\theta)\big) \begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\theta) - 2\, sin(\theta)\, cos(\theta) \\ cos(\theta) + cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

soit

$$\vec{t}(\theta) : \begin{pmatrix} -sin(\theta) - 2\, sin(\theta)\, cos(\theta) \\ 2\, cos^2(\theta) + cos(\theta) - 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

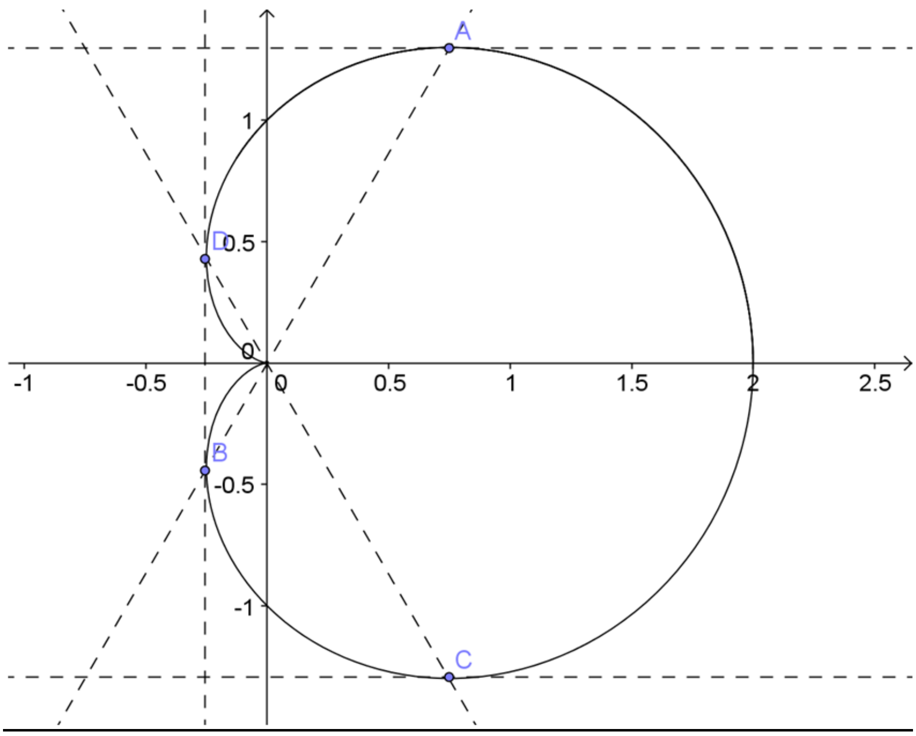
$$T(\theta) \text{ parallèle à } (O, \vec{\imath}) \Leftrightarrow \vec{t}(\theta) \cdot \vec{\jmath} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\, cos^2(\theta) + cos(\theta) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (cos(\theta) + 1)\ (2\, cos(\theta) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ cos(\theta) = -1\ \ ou\ \ cos(\theta) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ \theta = \pi\ \ ou\ \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$T(\theta) \text{ parallèle à } (O, \vec{\jmath}) \Leftrightarrow \vec{t}(\theta) \cdot \vec{\imath} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ -sin(\theta) - 2\, sin(\theta)\, cos(\theta) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ -sin(\theta)\, \big(1 + 2\ cos(\theta)\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ sin(\theta) = 0\ \ ou\ \ cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ \theta = 0\ \ ou\ \ \theta = \frac{2\,\pi}{3}$$

Nous sommes en mesure de tracer la courbe :



Cette courbe s'appelle une cardioïde

2) On a dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées :

$$M(\theta) : \left(\left(1 + cos(\theta)\right) cos(\theta), \left(1 + cos(\theta)\right) sin(\theta)\right)$$

$$M(\theta + \pi) : \left(\left(1 - cos(\theta)\right)\left(-cos(\theta)\right), \left(1 - cos(\theta)\right)\left(-sin(\theta)\right)\right)$$

$$I(\theta) : \left(cos^2(\theta), sin(\theta)\, cos(\theta)\right)$$

Donc les coordonnées de $I(\theta)$ vérifient :

$$\begin{cases} x = cos^2(\theta) \\ y = sin(\theta)\, cos(\theta) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\, cos(2\,\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}\, sin(2\,\theta) \end{cases}$$

Introduisons alors le point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. On a alors :

$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \frac{1}{2}\,\vec{u}(2\,\theta)$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, $I(\theta)$ décrit le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$

De plus, le vecteur $\overrightarrow{I(\theta)M(\theta)}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \big(1+cos(\theta)\big)\,cos(\theta) - cos^2(\theta) \\ \big(1+cos(\theta)\big)\,sin(\theta) - sin(\theta)\,cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{I(\theta)M(\theta)}\right\| = 1$$

3) On a :

$$\overrightarrow{\Omega J(\theta)} = \overrightarrow{I(\theta)\Omega}$$

Les cordonnées de $J(\theta)$ sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - cos^2(\theta) \\ y = -sin(\theta)\,cos(\theta) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x = 1 - cos^2(\theta) \\ y = -sin(\theta)\,cos(\theta) \end{cases}$$

Donc :

$$J(\theta) :\ \big(1 - cos^2(\theta), -sin(\theta)\,cos(\theta)\big)$$

4) On a :

$$J(\theta) = M(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - cos^2(\theta) = \big(1+cos(\theta)\big)\,cos(\theta) \\ -sin(\theta)\,cos(\theta) = \big(1+cos(\theta)\big)\,sin(\theta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,cos^2(\theta) + \ cos(\theta) - 1 = 0 \\ sin(\theta)\,\big(1 + 2\,cos(\theta)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cos(\theta) = -1 \\ sin(\theta) \ = 0 \end{cases} ou \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} :\ \theta = (2\,k + 1)\,\pi$$

5) Le vecteur $\overrightarrow{J(\theta)M(\theta)}$ a pour coordonnées : $\left(cos^2(\theta), sin(\theta)\ cos(\theta)\right)$

$$\begin{pmatrix} \left(1+cos(\theta)\right) cos(\theta) \\ \left(1+cos(\theta)\right) sin(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-cos^2(\theta) \\ -sin(\theta)\ cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ cos^2(\theta)+cos(\theta)-1 \\ sin(\theta)+2\ sin(\theta)\ cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rappelons un vecteur directeur de la tangente au point $M(\theta)$:

$$\vec{t}(\theta) : \begin{pmatrix} -sin(\theta)-2\ sin(\theta)\ cos(\theta) \\ 2\ cos^2(\theta)+cos(\theta)-1 \end{pmatrix}$$

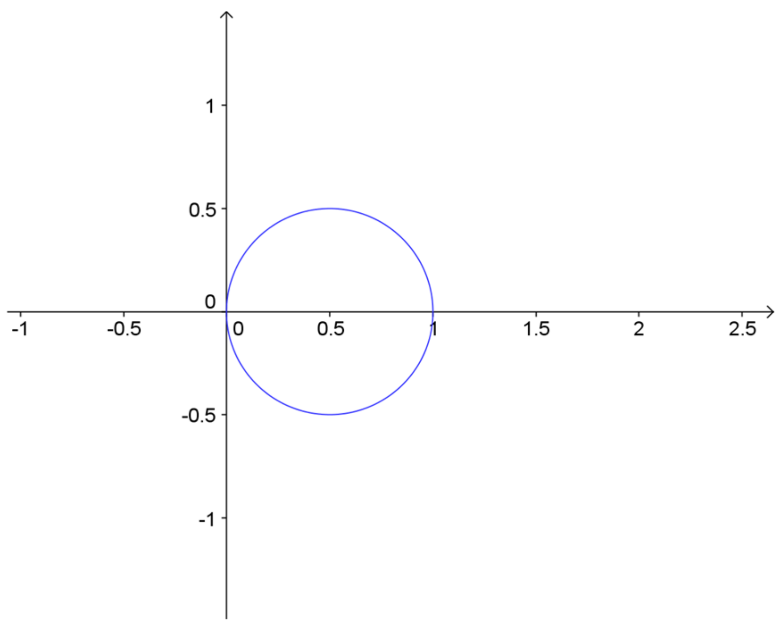
Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J(\theta)M(\theta)} \cdot \vec{t}(\theta) \\ &= (2\ cos^2(\theta)+cos(\theta)-1)\left(-sin(\theta)-2\ sin(\theta)\ cos(\theta)\right) \\ &+ \left(sin(\theta)+2\ sin(\theta)\ cos(\theta)\right)(2\ cos^2(\theta)+cos(\theta)-1) = 0 \end{aligned}$$

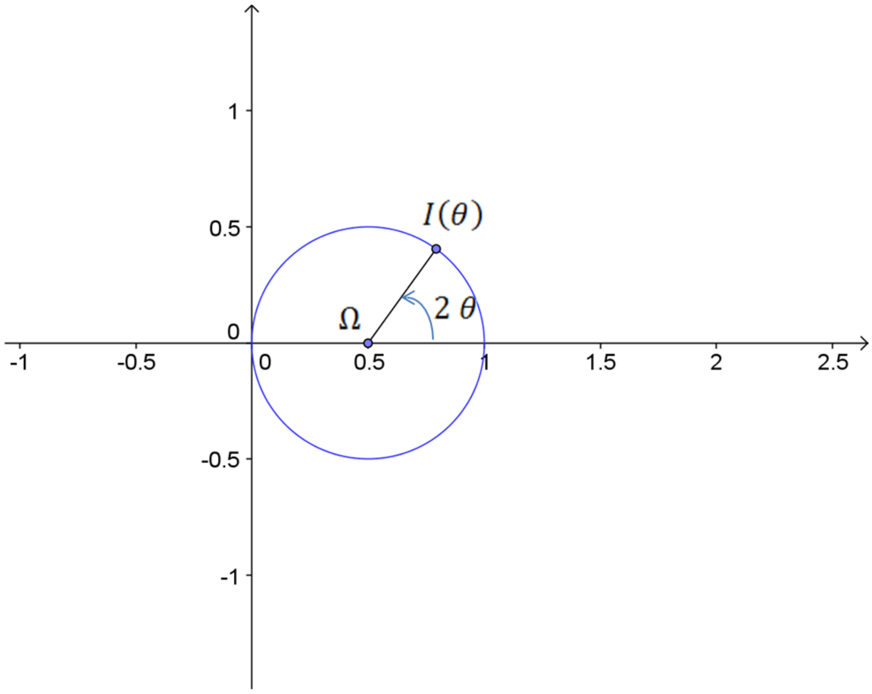
Donc $\overrightarrow{J(\theta)M(\theta)}$ et $\vec{t}(\theta)$ sont orthogonaux

6) Un point $M(\theta)$ pour $\theta \neq (2\ k+1)\ \pi$ pour peut se construire en utilisant le protocole suivant :

- Tracer le cercle C_1

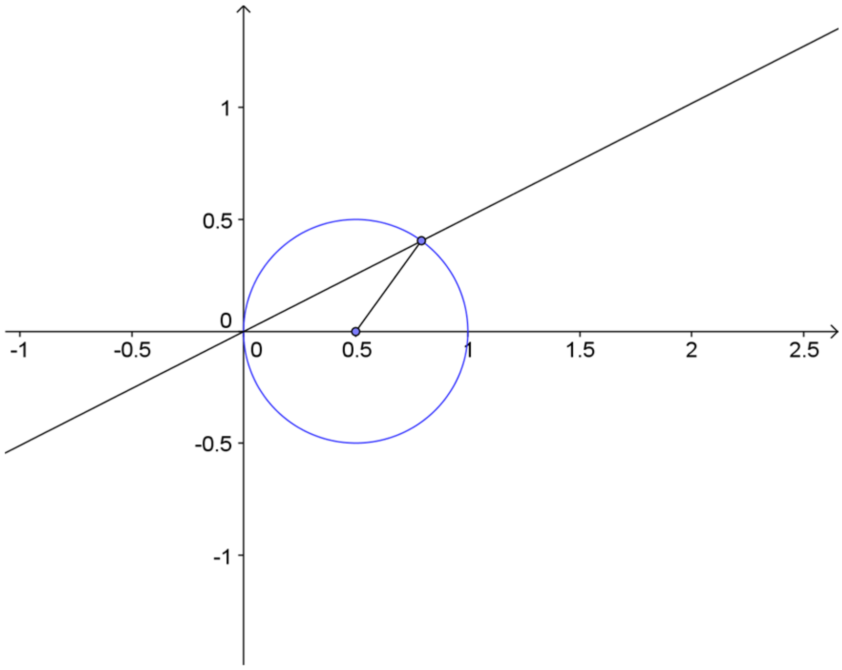


- Porter $I(\theta)$ sur C_1 tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega I(\theta)}\right) = 2\ \theta$

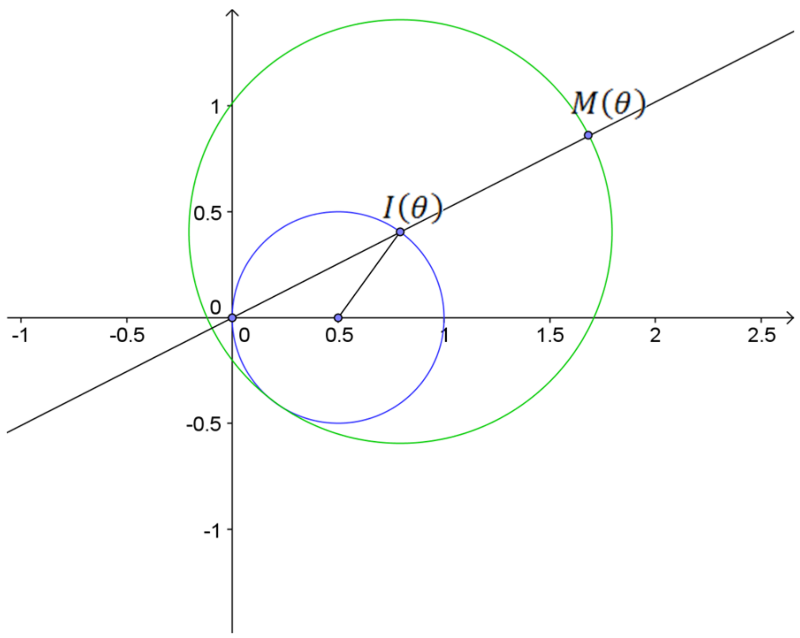


-

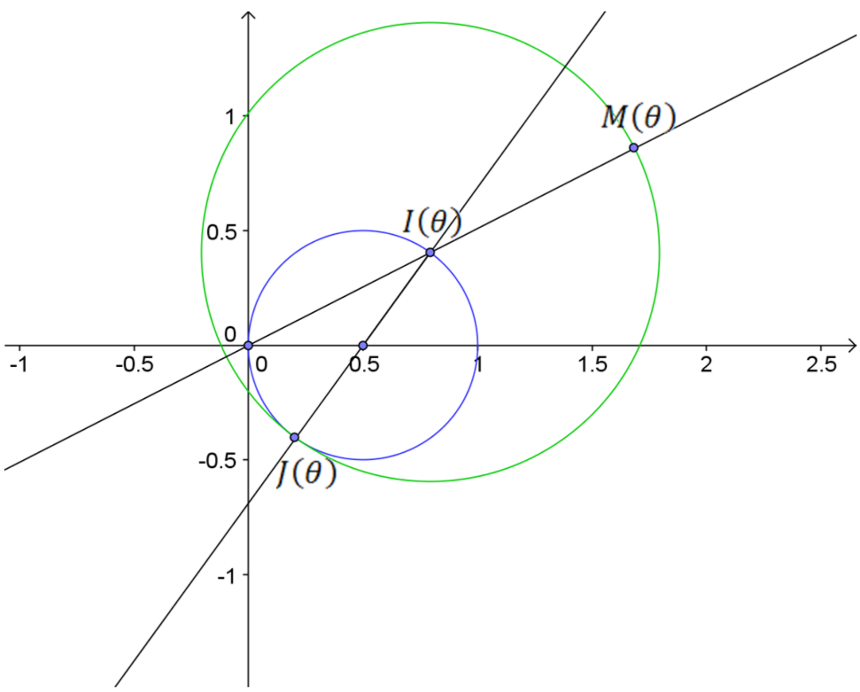
- Tracer la droite $(O, I(\theta))$



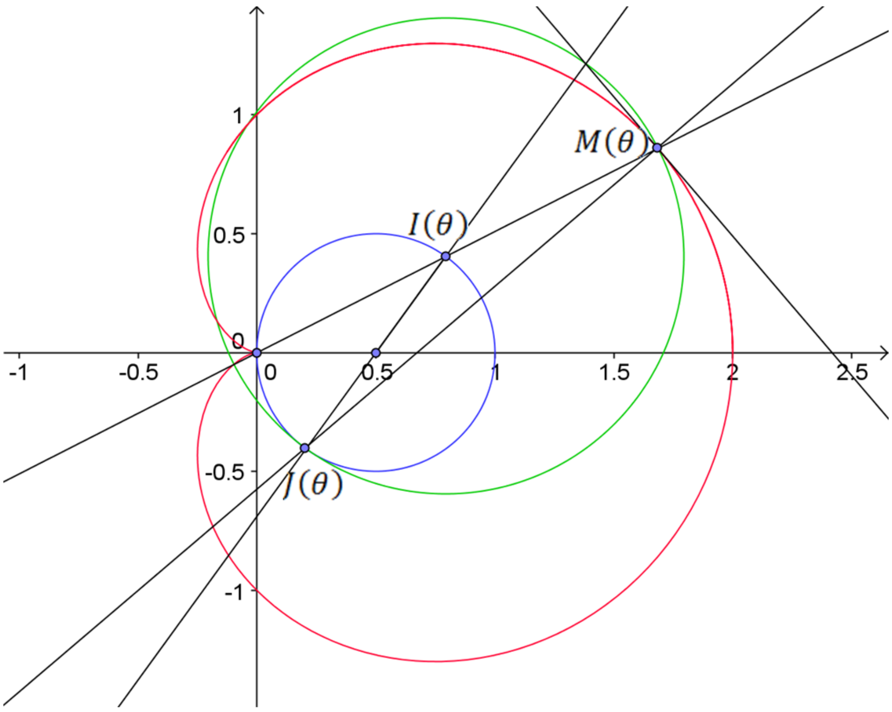
- Tracer le cercle de centre $I(\theta)$ et de rayon 1
- Les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont les points d'intersection de ce cercle avec la droite $(O, I(\theta))$. Le signe de $\rho(\theta)$ permet d'identifier lequel est $M(\theta)$.



- Porter $J(\theta)$ sur C_1 comme point diamétralement opposé à $I(\theta)$



- Tracer la droite $\big(J(\theta), M(\theta)\big)$
- Tracer la perpendiculaire au point $M(\theta)$ à la droite précédente pour obtenir la tangente à la courbe en $M(\theta)$.



Exercice 5

1)

Soit $(x,y) \in [0;+\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$ alors pour $x \neq 0$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x\,y}{(1+0)\,(1+0)\,(x+0)} = y$$

et pour $y \neq 0$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x\,y}{(1+0)\,(1+0)\,(y+0)} = x$$

Introduisons la norme infinie :

$$\|(x,y)\|_\infty = sup(|x|,|y|)$$

alors :

$$0 \leq f(x,y) \leq \|(x,y)\|_\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

2)

Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ alors on a :

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{x\, y}{(0+x)\,(0+y)\,(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

Donc :

$$0 \leq f(x, y) \leq sup\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$ posons :

$$A = \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit $(x, y) \in [0; +\infty[^2 \backslash [0, A]^2$ alors

Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $f(x, y) = 0$ donc

$$0 \leq f(x, y) < \varepsilon$$

Sinon $x > A$ et $y > A$ donc :

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon, \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{A} = \varepsilon$$

Soit :

$$sup\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) < \varepsilon$$

d'où :

$$0 \leq f(x, y) < \varepsilon$$

3) Notons que :

$$f(1,1) = \frac{1}{8}$$

et pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$ on a :

$$\forall\, (x, y) \in [0; +\infty[^2 \backslash [0,8]^2 :\ 0 \leq f(x, y) < \frac{1}{8}$$

Or f est continue sur le domaine compact $[0,8]^2$ donc elle admet un maximum qu'elle atteint en un point (x_0, y_0). Ainsi :

$$f(x_0, y_0) \geq f(1,1) = \frac{1}{8}$$

Donc $f(x_0, y_0)$ est également le maximum global de la fonction sur $[0; +\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$

4) Notons d'abord que f est nulle sur la frontière de $[0; +\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}$. Le (ou les) point(s) en lesquel(s) la fonction atteint son maximum est (sont) donc intérieurs au domaine $[0,8]^2$. Or f est différentiable sur l'intérieur de ce domaine. Un point $M(x, y)$ de ce dernier en lequel f atteint son maximum vérifie donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y\,(1+x)(1+y)(x+y) - x\,y\,(1+y)[(x+y)+(1+x)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2} =$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,[(1+x)\,(x+y) - x\,(2\,x+y+1)]}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

$$= \frac{y\,(1+y)\,(y-x^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

De même par échange de x et de y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x\,(1+x)\,(x-y^2)}{(1+x)^2\,(1+y)^2\,(x+y)^2}$$

Ainsi le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} y\,(1+y)\,(y-x^2) = 0 \\ x\,(1+x)\,(x-y^2) = 0 \end{cases}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$ il équivaut à :

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Soit :

$$x = y = 1$$

La fonction f admet donc pour maximum $\frac{1}{8}$ et elle l'atteint en un point unique $A(1,1)$