MAIRIE DE PARIS

Concours public
pour l'accès au corps des
Ingénieurs des services techniques
de la commune de Paris

Ouvert à partir du 25 mars 2013

Mathématiques

(Durée : 4 heures - coefficient 3)

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 5

Le sujet comporte 5 exercices qui sont indépendants et qui peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats(e)s pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
L'usage des calculatrices est autorisé ; toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.

Rappel : aucun nom, prénom, signature ou signe distinctif (supérieur hiérarchique, initiales quelles qu'elles soient, numéro de téléphone ou adresse de service, etc.) ne doit figurer sur le corps (ou le timbre) de votre composition, sous peine d'exclusion du concours.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.
On notera I_n la matrice unité et 0 la matrice nulle.
On notera $tr(M)$ la trace d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ (somme des éléments de la diagonale principale), et $det(M)$ le déterminant de M.

1) Soit n un entier naturel non nul, et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation :

$$A^2 - 2A + 4I_n = 0 \qquad (1)$$

a) Montrer que l'entier n est nécessairement pair, et que la matrice A n'est pas proportionnelle à I_n.
b) On suppose que $n = 2$, et que A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $tr(A)$ et $det(A)$ pour que la matrice A vérifie la relation (1).
Montrer qu'il existe une infinité de matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1).

2) On considère la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

et la suite de matrices $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ainsi définie :*

$$U_0 = I_2\ ;\ U_1 = A\ ;\ \ \forall k \geqslant 2,\ U_k = 2\ U_{k-1} - 4\ U_{k-2} \qquad (3)$$

a) Montrer que la matrice A *vérifie la relation* (1).
b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = A^k \qquad (4)$$

3) On considère, pour tout entier naturel p*, et pour tout réel* x*, la matrice :*

$$M_p(x) = x^p\ U_p \qquad (5)$$

et $S_p(x)$ *la matrice ainsi définie :*

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} x^k\ U_k \qquad (6)$$

On admet qu'une suite de matrices $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *de* $M_2(\mathbb{R})$ *converge vers la matrice nulle lorsque l'entier* p *tend vers* $+\infty$ *si et seulement si les quatre termes de la matrice* (T_p) *tendent vers* 0 *lorsque l'entier* p *tend vers* $+\infty$.
a) Montrer que pour tout réel x*, la matrice* $I_2 - xA$ *est inversible, et déterminer son inverse sous la forme d'une combinaison linéaire de* I_2 *et* A.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x *pour que la suite de matrices* $(x^pU_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *tende vers* 0 *lorsque l'entier* p *tend vers* $+\infty$.
c) En déduire, lorsque cette condition est réalisée, que la suite $(S_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(I - xA)^{-1}$ *lorsque l'entier* p *tend vers* $+\infty$.

Exercice 2
On considère l'équation différentielle suivante, où y *désigne une fonction inconnue réelle d'une variable réelle dérivable :*

$$\forall x \in I,\ 2x(1-x)y' + (1-x)y = 1 \qquad (1)$$

où I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
1) Chercher les fonctions S *développables en série entière au voisinage de* 0*, solutions de l'équation* (1).

2) Chercher les solutions de l'équation (1) *respectivement sur les intervalles* $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, *et* $]1, +\infty[$.

3) Montrer qu'il existe une fonction f unique, définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, dérivable, et solution de l'équation différentielle (1).

4) Montrer que la fonction f déterminée à la question précédente est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

Exercice 3

On considère la courbe (C) d'équation polaire :

$$\rho = 1 + \cos(\theta) \qquad (1)$$

(θ et ρ désignent respectivement l'angle polaire et le rayon polaire du point $M(\theta)$).
1) Etudier la courbe (C) et la représenter par rapport à un repère affine orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Montrer que le milieu $I(\theta)$ du segment $[M(\theta), M(\theta + \pi)]$ décrit un cercle (C_1) dont on précisera le centre et le rayon.
Calculer la longueur du segment $[I(\theta)M(\theta)]$.

3) On note $J(\theta)$ le point du cercle (C_1) diamétralement opposé au point $I(\theta)$.

4) Déterminer les réels θ pour lesquels $J(\theta) = M(\theta)$.
On supposera dans la suite que cette condition n'est pas réalisée.

5) Montrer que la droite $D(\theta)$ joignant les points $J(\theta)$ et $M(\theta)$ est perpendiculaire à la tangente à (C) en $M(\theta)$.

6) En utilisant les résultats précédents, déterminer, en utilisant le cercle (C_1), une construction des points $M(\theta)$ et des tangentes à (C) en $M(\theta)$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |\sin x| \qquad (1)$$

1) Déterminer la série de Fourier de f, et en déduire qu'il existe une suite réelle (a_n), que l'on explicitera, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx) \qquad (2)$$

2) Montrer que pour tout entier naturel m, il existe un polynôme unique P_m de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(mu) = P_m(\cos u) \qquad (3)$$

3) En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme R_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2nx) = R_n(\sin x) \qquad (4)$$

4) En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction g définie par :

$$\forall x \in [-1,1], g(x) = |x| \qquad (5)$$

Exercice 5

On considère la fonction f réelle de deux variables réelles définie par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \qquad (1)$$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$, ~~et préciser, en~~ appelant également f le prolongement par continuité, la valeur de $f(0,0)$.

2) Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$, dépendant de ϵ, tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus [0,A]^2,\ 0 \leqslant f(x,y) < \epsilon \qquad (2)$$

3) En déduire que la fonction f a un maximum global sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

4) Montrer que le maximum de la fonction f sur $(\mathbb{R}_+)^2$, est atteint en un point unique (a,b) que l'on déterminera.

FIN DE L'ENONCE