Corrigé sujet 2015

Exercice 1 :

1) Soit u un endomorphisme cyclique de $\mathbb{E}$.

Soit $v_0 \in \mathbb{E}$ tel que $\left(v_0, u(v_0), u^2(v_0)\right)$ soit une base de $\mathbb{E}$, alors :

$$Im(u) = Vect\left(u(v_0), u^2(v_0), u^3(v_0)\right)$$

Or $\left(u(v_0), u^2(v_0)\right)$ est libre donc :

$$dim\left(Im(u)\right) \geq 2$$

Montrons que la réciproque est fausse en prenant $u = Id_{\mathbb{E}}$. On a $rg(u) = 3$ et u non cyclique.

2) On a :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\,V = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A^2\,V = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Det(V, A\,V, A^2\,V) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -36 - 4 \times 36 \neq 0$$

Donc $(V, A\,V, A^2\,V)$ est une base de $\mathbb{E}$ et u est cyclique.

3) On a :

$$\begin{cases} u(V) = 0\,V + 1\,u(V) + 0\,u^2(V) \\ u\left(u(V)\right) = 0\,V + 0\,u(V) + 1\,u^2(V) \\ u\left(u^2(V)\right) = a\,V + b\,u(V) + c\,u^2(V) \end{cases}$$

La matrice de u dans $S(u, V)$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

C'est une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est :

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 1 & -X & b \\ 0 & 1 & c - X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & b \\ 1 & c-X \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & c-X \end{vmatrix}$$

$$= -X\,(-X\,(c-X)-b)+a$$

$$= -X^3 + c\,X^2 + b\,X + a$$

Or deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique, on en déduit que la matrice B est indépendante du choix de V.

4) Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme cyclique u, alors :

Décrivons un vecteur W de $\mathbb{E}$ par ses coordonnées (x, y, z) dans une base $S(u, V)$. Alors

$$W \in \mathbb{E}_\lambda \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 1 & -\lambda & b \\ 0 & 1 & c-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\, x + a\, z = 0 \\ x - \lambda\, y + b\, z = 0 \\ y + (c-\lambda)\, z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda\,(\lambda\,(\lambda-c)\ -b)+a)\,z = 0 \\ x = \lambda\, y - b\, z \\ y = (\lambda - c)\, z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} (-\lambda\,(\lambda\,(\lambda-c)\ -b)+a) = 0 \\ x = (\lambda\,(\lambda-c)-b)\, z \\ y = (\lambda - c)\, z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_\lambda = \{W = z\left((\lambda\,(\lambda-c)-b)\,V + (\lambda-c)\,u(V) + u^2(V)\right), z \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect[(\lambda\,(\lambda-c)-b)\,V + (\lambda-c)\,u(V) + u^2(V)]$$

Le vecteur générateur de $\mathbb{E}_\lambda$ est non nul donc :

$$dim(\mathbb{E}_\lambda) = 1$$

Soit un endomorphisme cyclique u. Montrons que l'on a :

$$u \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow u \text{ a 3 valeurs propres distinctes}$$

$(\Rightarrow)$ Supposons u diagonalisable alors $\mathbb{E}$ est somme directe de ses sous espaces propres :

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{E}_{\lambda_2} \ldots \oplus \mathbb{E}_{\lambda_p}$$

et chaque sous espace propre a pour dimension 1 donc :

$$dim(\mathbb{E}) = dim(\mathbb{E}_{\lambda_1}) + dim(\mathbb{E}_{\lambda_2}) + \cdots + dim\left(\mathbb{E}_{\lambda_p}\right)$$

Soit :

$$3 = p$$

u a donc 3 valeurs propres distinctes.

$(\Leftarrow)$ Supposons u a 3 valeurs propres distinctes alors, puisque $dim(\mathbb{E}) = 3$, u est diagonalisable

Exercice 2

1) Commençons par la définition de l'intégrande en posant :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t)\,(1+x\,t)}}$$

si $x \geq 0$, on a pour tout $t \in [0,1[\,:\ 1-t > 0, 1+x\,t > 0$ donc $g(x,t)$ est définie

si $x < 0$, $g(x,t)$ est définie pour tout $t \in [0,1[$ si et seulement si :

$$\forall\, t \in [0,1[\,:\ 1 + x\,t > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [0,1[\ :\ x\,t > -1$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [0,1[\ :\ t < -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

Donc $g(x,t)$ est définie pour tout $t \in [0,1[$ si et seulement si $x \in [-1,+\infty[$

Etudions maintenant la convergence de l'intégrale impropre en 1.

Pour $x \in\,]-1,+\infty[$ on a en $t = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)\,(1+x\,t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

L'intégrale est donc convergente en 1.

Pour $x = -1$ on a en $t = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)\,(1+x\,t)}} \sim \frac{1}{1-t}$$

L'intégrale est donc divergente en 1.

f est donc définie sur $]-1, +\infty[$

2) Soit $-1 < x < y$ alors :

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x\,t}} - \frac{1}{\sqrt{1+y\,t}} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{\sqrt{1+y\,t} - \sqrt{1+x\,t}}{\sqrt{1+x\,t}\,\sqrt{1+y\,t}} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{(1+y\,t) - (1+x\,t)}{\sqrt{1+x\,t}\,\sqrt{1+y\,t}\,\left(\sqrt{1+y\,t} + \sqrt{1+x\,t}\right)} \right) dt$$

$$= (y-x) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{t}{\sqrt{1+x\,t}\,\sqrt{1+y\,t}\,\left(\sqrt{1+y\,t} + \sqrt{1+x\,t}\right)} \right) dt$$

Posons :

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \left(\frac{t}{\sqrt{1+x\,t}\,\sqrt{1+y\,t}\,\left(\sqrt{1+y\,t} + \sqrt{1+x\,t}\right)} \right)$$

$h(x,t)$ est une fonction continue de la variable t et strictement positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Donc :

$$\int_0^1 h(x,t)\ dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} h(x,t)\ dt > 0$$

Or : $y - x > 0$ donc :

$$f(x) - f(y) > 0$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$

3) <u>limite en -1</u>

posons $x = -1 + h$ pour $h > 0$:

$$f(-1+h) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)\,(1-t+h\ t)}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 +\ h\,t\,(1-t)}}\,dt\ \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 +\ h}}\,dt$$

Faisons un changement de variable :

$$1 - t = u, \qquad dt = -du$$

Alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 +\ h}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2 +\ h}}\,du$$

$$= \left[Ln\left|u + \sqrt{u^2 +\ h}\right|\right]_0^1 = Ln\left(1 + \sqrt{1 +\ h}\right) - Ln\left(\sqrt{h}\right)$$

Or :

$$\lim_{h \to 0^+} Ln\left(1 + \sqrt{1 +\ h}\right) - Ln\left(\sqrt{h}\right) = +\infty$$

On en déduit par comparaison :

$$\lim_{h \to 0^+} f(-1+h) = +\infty$$

<u>limite en $+\infty$</u> : On a :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)\,x\,t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t)\,t}}\,dt$$

L'intégrale majorante étant définie car en 0 on a :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)\,t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Le théorème des gendarmes montre alors que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

4) On a :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, dt = \left[-2\sqrt{1-t}\,\right]_0^1 = 2$$

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = [sin^{-1}(t)\,]_0^1 = sin^{-1}(1) - sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

5) On pose :

$$u = \sqrt{\frac{1+x\,t}{1-t}}$$

Alors :

$$u^2 = \frac{1+x\,t}{1-t}$$

$$u^2\,(1-t) = 1 + x\,t$$

$$u^2 - u^2\,t = 1 + x\,t$$

$$t = \frac{u^2-1}{u^2+x} = 1 - \frac{x+1}{u^2+x}$$

$$dt = \frac{2\,u\,(x+1)}{(u^2+x)^2}\, du$$

Ainsi :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\sqrt{\frac{1-t}{1+x\,t}}\, dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{u^2+x}{x+1}\,\frac{1}{u}\,\frac{2\,u\,(x+1)}{(u^2+x)^2}\, du$$

$$= 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x}\, du$$

Distinguons 3 cas :

1er cas : $x > 0$:

$$f(x) = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+\left(\sqrt{x}\right)^2}\, du$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

2ème cas : $x = 0$:

$$f(x) = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= 2\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{+\infty} = 2$$

3ème cas :$-1 < x < 0$:

$$f(x) = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 - \left(\sqrt{-x}\right)^2}\, du$$

$$= 2\left[\frac{1}{2\sqrt{-x}}\, Ln\left|\frac{u+\sqrt{-x}}{u-\sqrt{-x}}\right|\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-x}}\, Ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$$

<u>Exercice 3</u> :

1) Soit $A > 0$ alors :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, R^n > A$$

Or :

$$\forall\, x \in [0, R[: S(x) \geq \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, x^n$$

Et :

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, R^n > A$$

Donc :

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ \forall\ x\ \in\ ]R-\alpha,R[\ :\ S(x) \geq \sum_{n=0}^{n_0} a_n\, x^n > A$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to R^-} S(x) = +\infty$$

2) On a :

$$\forall\ x\ \in\ ]-1,1[\ : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n\right)}{n!}\ (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\ \times 3 \dots (2\,n-1)}{2^n}\ (-1)^n x^{2\,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{(2\,n)\,!}{2^n\ \times 2 \times 4 \times \dots \times (2\,n)}\ x^{2\,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ x^{2\,n}$$

3) On déduit par intégration pour tout x de $]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

4) Le terme général b_n du développement en série entière de $f(x)$ sur $]-1,1[$ est défini par :

$$\begin{cases} b_{2\,n} = 0 \\ b_{2\,n+1} = \dfrac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2} \times \dfrac{1}{2\,n+1} \end{cases}$$

Cette série entière est convergente sur $]-1,1[$ donc son rayon de convergence R vérifie :

$$R \geq 1$$

Or pour $x > 1$, considérons la série de terme général c_n défini par :

$$c_n = \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\ \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

On a :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{2\,n+3}}{b_{2\,n+1}} = \frac{(2\,n+2)\,(2\,n+1)(2\,n+1)\,x^2}{4\,(n+1)^2\,(2\,n+3)} \sim \frac{8\,n^3\,x^2}{8\,n^3} \sim x^2$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = x^2 > 1$$

La règle de D'Alembert montre alors que la série de terme général c_n diverge et donc :

$$R \leq 1$$

D'où :

$$R = 1$$

Considérons alors la série entière de terme général $u_n(x)$ défini par :

$$u_n(x) = b_n\, x^n$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Les termes b_n sont positifs ou nuls. Supposons alors par l'absurde que la série de terme général $u_n(1)$ diverge alors on aurait d'après 1) :

$$\lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

Soit :

$$\lim_{x\to1^-} sin^{-1}(x) = +\infty$$

Ce qui est absurde.

Donc la série de terme général $u_n(1) = b_n$ converge. Or sur $[-1,1]$ on a :

$$\left|\frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\,\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\right| \leq \frac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\,\frac{1}{2\,n+1} = b_n$$

La série entière de terme général $u_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[-1,1]$ donc sa somme $S(x)$ est continue sur $[-1,1]$. On en déduit :

$$S(1) = \lim_{x\to1^-} S(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

$$S(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} S(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$$

Ainsi :

$$\forall\, x \in [-1,1] :\ f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

Exercice 4 :

1) On a pour tout $(P, P', Q, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\varphi(P + \alpha\, P', Q) = \int_{-1}^{1} (P + \alpha\, P')(t)\ Q(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt + \alpha \int_{-1}^{1} P'(t)\ Q(t)\, dt$$

$$= \varphi(P, Q) + \alpha\, \varphi(P', Q)$$

D’autre part :

$$\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$$

Donc :

$$\varphi(Q, P + \alpha\, P') = \varphi(Q, P) + \alpha\, \varphi(Q, P')$$

φ est donc une forme bilinéaire symétrique.

Montrons qu’elle est définie positive :

$$\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [-1,1]: P^2(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in [-1,1]: P(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ P = 0$$

Donc φ est définie.

$$\varphi(P, P) \geq 0$$

Donc φ est positive et finalement un produit scalaire sur $\mathbb{E}$

2) Appliquons le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{E}$:

$$\boxed{P_0 = 1}$$

$$P_1 = X - \frac{\varphi(X, P_0)}{\varphi(P_0, P_0)}\, P_0$$

Où :

$$\varphi(X, P_0) = \int_{-1}^{1} t \; dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_1 = X}$$

$$P_2 = X^2 - \frac{\varphi(X^2, P_0)}{\varphi(P_0, P_0)}\, P_0 - \frac{\varphi(X^2, P_1)}{\varphi(P_1, P_1)}\, P_1$$

Où :

$$\varphi(P_0, P_0) = \int_{-1}^{1} 1 \; dt = 2$$

$$\varphi(X^2, P_0) = \int_{-1}^{1} t^2 \; dt = \frac{2}{3}$$

$$\varphi(X^2, P_1) = \int_{-1}^{1} t^3 \; dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_2 = X^2 - \frac{1}{3}}$$

$$P_3 = X^3 - \frac{\varphi(X^3, P_0)}{\varphi(P_0, P_0)}\, P_0 - \frac{\varphi(X^3, P_1)}{\varphi(P_1, P_1)}\, P_1 - \frac{\varphi(X^3, P_2)}{\varphi(P_2, P_2)}\, P_2$$

Où :

$$\varphi(P_1, P_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \; dt = \frac{2}{3}$$

$$\varphi(X^3, P_0) = \int_{-1}^{1} t^3 \; dt = 0$$

$$\varphi(X^3, P_1) = \int_{-1}^{1} t^4 \; dt = \frac{2}{5}$$

$$\varphi(X^3, P_2) = \int_{-1}^{1} t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = 0$$

Donc :

$$\boxed{P_3 = X^3 - \frac{3}{5} X}$$

3) On a :

$$P_3 = X \left(X^2 - \frac{3}{5}\right) = X \left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

On a donc :

$$a = -\sqrt{\frac{3}{5}} \;, \quad b = 0, \qquad c = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

4) Posons : $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ alors :

$$\int_{-1}^{1} P(t) \; dt = \alpha \int_{-1}^{1} t^2 \; dt + \beta \int_{-1}^{1} t \; dt + \gamma \int_{-1}^{1} t \; dt = \frac{2}{3} \alpha + 2 \gamma$$

Et :

$$A\, P(a) + B\, P(b) + C\, P(c) = A \left(\frac{3}{5} \alpha - \sqrt{\frac{3}{5}} \beta + \gamma\right) + B \gamma + C \left(\frac{3}{5} \alpha + \sqrt{\frac{3}{5}} \beta + \gamma\right)$$

Ainsi :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X]: \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = A\,P(a) + B\,P(b) + C\,P(c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{5}\,A + \dfrac{3}{5}\,C = \dfrac{2}{3} \\ -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\ A + \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,C = 0 \\ A + B + C = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{5}\,A = \dfrac{2}{3} \\ C = A \\ 2\,A + B = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{9} \\ C = \dfrac{5}{9} \\ B = \dfrac{8}{9} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X]: \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \frac{5}{9}\,P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\,P(0) + \frac{5}{9}\,P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

5) Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$ alors par division euclidienne :

$$\exists\,!\,(Q,R) \in (\mathbb{R}_5[X])^2 :\ P = Q\,P_3 + R$$

Avec :

$$d°(R) < d°(P_3) = 3$$

Donc :

$$R \in \mathbb{R}_2[X]$$

Or :

$$(d°(P) = d°(R)\ et\ Q = 0)\ ou\ \ d°(P) = \ d°(Q) + d°(P_3)$$

Donc :

$$d°(Q) \leq 2$$

Et :

$$Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

On a alors

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \int_{-1}^{1} Q(t)\, P_3(t)\ dt + \int_{-1}^{1} R(t)\ dt$$

$$= 0 + \frac{5}{9}\ R(a) + \frac{8}{9}\ R(b) + \frac{5}{9}\ R(c)$$

$$= \frac{5}{9}\ P(a) + \frac{8}{9}\ P(b) + \frac{5}{9}\ P(c)$$

Exercice 5

1) Posons :

$$\begin{cases} x = r\ cos(\theta) \\ y = r\ sin(\theta) \end{cases}$$

Alors :

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2\,x^2y^2 - 4\,x\,y$$

$$= r^4 - 2\,r^4\ cos^2(\theta)\ sin^2(\theta) - 4\,r^2 cos(\theta)\ sin(\theta)$$

$$= r^4\ \left(1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta)\ \right) - 2\,r^2\ sin(2\,\theta)$$

Or :

$$\frac{1}{2}\ sin^2(2\,\theta) \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\ sin^2(2\,\theta) \geq -\frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta) \geq \frac{1}{2}$$

$$r^4\ \left(1 - \frac{1}{2} sin^2(2\,\theta)\ \right) \geq \frac{1}{2}\ r^4$$

Et :

$$2\,r^2\ sin(2\,\theta) \leq 2\,r^2$$

$$-2\,r^2\ sin(2\,\theta) \geq -2\,r^2$$

Donc :

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\, r^4 - 2\, r^2$$

D'autre part :

$$r = \|(x,y)\|_2$$

On en déduit par comparaison :

$$\lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

2) On note que $f(0,0) = 0$. Or pour $A = 1 :\ \exists\, R > 0 : \|(x,y)\|_2 > R \Rightarrow\ f(x,y) > 1$

Soit D la boule fermée pour la norme précédente de centre $(0,0)$ et de rayon R. D est un compact de $\mathbb{R}^2$ et f est continue sur D. Donc f admet un minimum sur D qu'elle atteinten au moins un point (x_0, y_0). Or $(0,0) \in D$ donc :

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0) = 0$$

De plus :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D : f(x,y) > 1 > f(x_0, y_0)$$

f admet donc un minimum global en (x_0, y_0). En ce point la différentielle est nulle donc les dérivées partielles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\, x^3 - 4\, y = 0 \\ 4\, y^3 - 4\, x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = x^9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} ou \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

f admet donc 3 points stationnaires : $A(0,0)$, $B(1,1), C(-1,-1)$. Or :

$$f(1,1) = f(-1,-1) = -2 < f(0,0)$$

Le minimum de f est donc -2 et il est atteint en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$

3) Sur $D = [-1,1]^2$ g a pour minimum -2 et atteint en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$.

g étant continue sur D qui est compact, elle y admet un maximum qu'elle atteint. Or on a :

$$g(-1,1) = 6 > f(0,0) = 0$$

Donc le maximum ne peut être atteint en un point intérieur de D sinon les dérivées partielles devraient y être nulles toutes deux. Le maximum est donc atteint sur la frontière constituée de 4 segments.

<u>1er segment</u> : $x = 1, -1 \leq y \leq 1$:

$$g(1, y) = 1 + y^4 - 4\,y = h(y)$$

$$h'(y) = 4\,y^3 - 4 = 4\,(y^3 - 1)$$

donc

$$\forall\, y \in [-1,1[\, :\; h'(y) < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et donc atteint son maximum en -1 qui est :

$$h(-1) = 6$$

<u>2ème segment</u> : $x = -1, -1 \leq y \leq 1$:

$$g(1, y) = 1 + y^4 + 4\,y = k(y)$$

Une étude analogue au cas précédent montre que k atteint son maximum en 1 qui est :

$$k(1) = 6$$

On peut alors noter pour les deux autres segments qu'ils sont les symétriques des précédents par rapport à la bissectrice intérieure $y = x$ et que l'on a $f(x, y) = f(y, x)$.

On en déduit que g a pour minimum 6 qu'elle atteint en $(-1,1)$ et $(1, -1)$