Corrigé sujet 2012

Exercice 2 :

1)

a) $f(x,t)$ est continue en tant que fonction de deux variables sur $\mathbb{R} \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

De plus, f admet sur $\mathbb{R} \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t) = sin(t)\, e^{x\, sint(t)}$$

qui est continue sur le même domaine donc g est de classe C_1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, e^{x\, sint(t)}\,dt$$

Posons :

$$h(x,t) = sin(t)\, e^{x\, sint(t)}$$

Pour x réel fixé, $h(x,t)$ en tant que fonction de t est continue, positive ou nulle et non identiquement nulle sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc son intégrale sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement positive, d'où :

$$g'(x) > 0$$

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b)

La fonction $sin(t)$ est concave sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe est donc comprise entre sa tangente en 0 et sa corde entre les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Or la tangente a pour équation :

$$y = sin'(0)t + sin(0)$$

Soit :

$$y = t$$

et la corde a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

donc pour équation

$$y = \frac{2}{\pi}\ t$$

Il en résulte sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}\ t \leq sin(t) \leq t$$

c)

Soit $x \leq 0$ alors $-x \geq 0$ donc $\forall\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{2}{\pi} x\ t \leq -x\ sin(t) \leq -x\ t$$

soit :

$$x\ t\ \leq x\ sin(t) \leq \frac{2}{\pi} x\ t$$

donc :

$$e^{x\ sin(t)} \leq e^{\frac{2}{\pi} x\ t}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\ sin(t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2}{\pi} x\ t} dt = \left[\frac{\pi}{2\ x}\ e^{\frac{2}{\pi} x\ t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Soit :

$$\boxed{0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2\ x}\ (e^x - 1)}$$

Or :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi}{2\ x}\ (e^x - 1) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Soit $x > 0$ alors $\forall\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x\,t \leq x\,sin(t) \leq x\,t$$

donc :

$$e^{\frac{2}{\pi}x\,t} \leq e^{x\,sin(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2}{\pi}x\,t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\,sin(t)} dt$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \leq g(x)}$$

De plus :

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right) \leq \frac{g(x)}{x}}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right) = +\infty$$

D'après le théorème de comparaison pour la limite :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = +\infty}$$

d) Déjà fait

e) Nous avons vu que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il est à noter pour les mêmes raisons invoquées au 1) que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt > 0$$

g est donc convexe. La tangente en 0 a pour équation :

$$y = g'(0)x + g(0)$$

avec :

$$g'(0) = 1$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

2)
a)

Par une récurrence triviale, il est facile de montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre et que :

$$g^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, e^{x\,sin(t)} dt$$

Ainsi sur tout intervalle de la forme $]-\infty; a[$

$$\left|g^{(n)}(x)\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sin^n(t)|\, e^{x\,sin(t)} dt \leq g(x) \leq g(a)$$

g est donc somme de sa série de Taylor soit :

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n}$$

Autre méthode sans utiliser le fait que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre :

Posons pour x réel fixé :

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(x\,sin(t)\right)^n}{n!}$$

Cette suite de fonctions tend simplement sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction :

$$\varphi(t) = e^{x\,sin(t)}$$

Or sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x\,sin(t)|^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

La convergence est donc uniforme sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_N(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt$$

Soit :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x\,sin(t)\right)^n}{n!}\,dt = g(x)$$

d'où :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin(t)\right)^n dt}{n!}x^n$$

b)

g étant dérivable à tout ordre est C_∞ donc en particulier de classe C_2. Et sur $\mathbb{R}$:

$$x\,g''(x) + g'(x) - x\,g(x)$$

$$= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\,sint(t)}\,dt$$

$$= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2(t)-1)\,e^{x\,sint(t)}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt$$

$$= -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)\left(x\,cos(t)\,e^{x\,sint(t)}\right)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt$$

$$= -\left(\left[cos(t)\,e^{x\,sint(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\,e^{x\,sint(t)}\,dt$$

$$= 1$$

Donc g est solution sur $\mathbb{R}$ de :

$$x\, y'' + y' - x\, y = 1$$

c) On a sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, I_n}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1}$$

$$g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)\, I_n}{(n-1)!}\, x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-2}$$

Or :

$$x\, g''(x) + g'(x) - x\, g(x) = 1$$

Donc :

$$x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n = 1$$

=

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-2)!}\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{(n-1)!}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!}\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}\, x^n = 1$$

On en déduit :

$$\boxed{I_1 = 1}$$

Et pout tout $n \geq 2$:

$$\frac{I_{n+1}}{(n-1)!} + \frac{I_{n+1}}{n!} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

Soit :

$$n\, I_{n+1} + I_{n+1} = n\ \ I_{n-1}$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{n}{n+1}\ \ I_{n-1}}$$

A noter que cette formule reste valable pour $n = 1$. Elle définit les termes de rang pair et ceux de rang impair sachant :

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}}$$

d)

Reprenant la démarche précédente, les solutions DSE sont les solutions dont les coefficients notés a_n vérifient en posant :

$$a_n = \frac{I'_n}{n!}$$

Les relations

$$\boxed{I'_1 = 1}$$

et pour $n \geq 1$:

$$\boxed{I'_{n+1} = \frac{n}{n+1}\ \ I'_{n-1}}$$

La suite (I'_n) vérifie donc la même relation de récurrence que la suite (I_n) et comme $I'_1 = I_1 = 1$, les termes de rang impair des deux suites sont les mêmes et pour ceux de rang impair, en notant que :

$$I'_0 = \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right)\ I_0$$

sont définis par :

$$I'_n = \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right)\ I_n$$

les solutions DSE sont donc les fonctions de la forme :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p+1}}{(2p+1)!}\ x^{2p+1} + \left(\frac{2}{\pi}\ I'_0\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p}}{(2p)!}\ x^{2p}$$

où I'_0 est un réel arbitraire, donc de la forme :

$$\boxed{h(x) = g(x) + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2p}}{(2p)!}\ x^{2p}}$$

où k est un réel arbitraire

3) Sur $]-\infty; 1]$ on a :

$$x\, t\ \leq x\, sin(t)$$

donc :

$$e^{x\, t}\ \leq e^{x\, sin(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\, t}\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\, sin(t)} dt$$

$$\left[\frac{e^{x\, t}}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq g(x)$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x} \leq g(x)$$

Soit pour $a < 1$

$$\int_a^1 \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x}\ dx \leq \int_a^1 g(x)\ dx$$

Or en $-\infty$:

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x} \sim -\frac{1}{x}$$

donc

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^1 \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - 1}{x}\ dx = +\infty$$

d'où par comparaison :

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^1 g(x)\, dx = +\infty$$

Donc g n'est pas intégrable sur $]-\infty; 0]$

Exercice 3 :

4) L'équation se met sous forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec : $a = b$

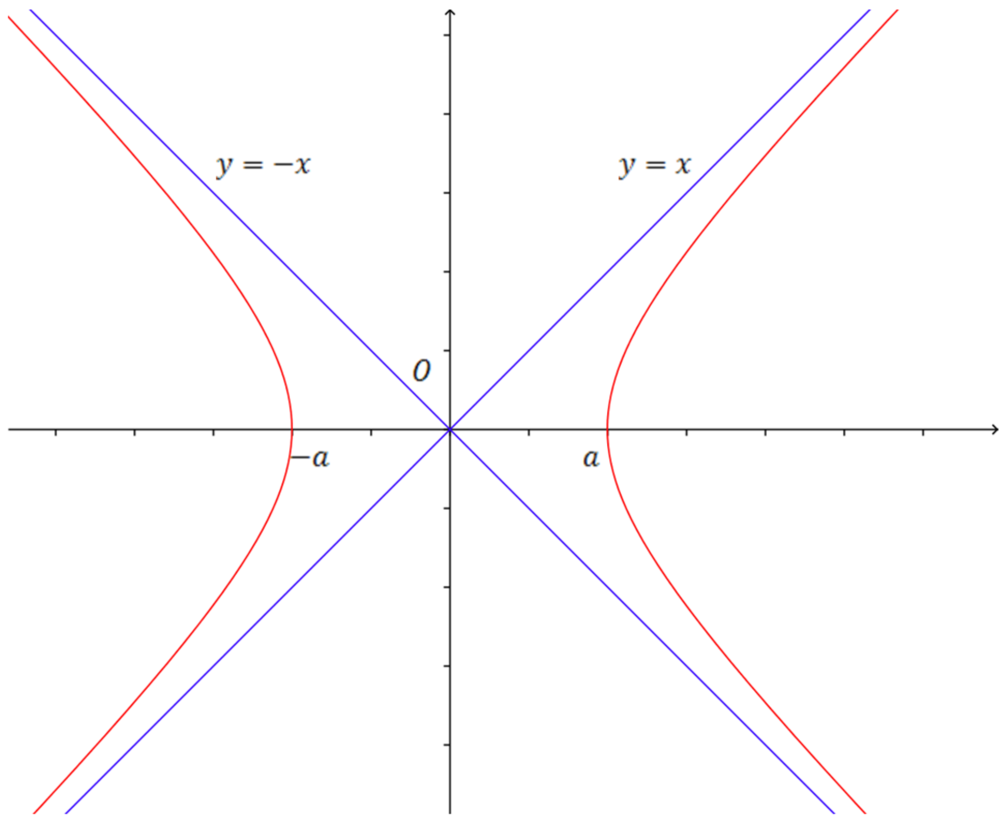
Il s'agit d'une hyperbole équilatère d'asymptotes les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$

Le tracé s'obtient en étudiant sur $[a; +\infty[$ la courbe :

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

et en effectuant les symétries de centre O et d'axe (O, y)

L'allure de la courbe est la suivante :



5)

a) Tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole peut être décrit par un jeu de coordonnées (ρ, θ) (non nécessairement polaires, car ρ peut être choisi négatif) tels que :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

avec :

$$\rho \in \mathbb{R}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2(\theta) - \rho^2 \sin^2(\theta) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) = a^2$$
$$\Leftrightarrow \rho^2 \cos(2\theta) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos(2\theta)} \\ \cos(2\theta) > 0 \end{cases}$$

A ce stade, si on se limite à un jeu de coordonnées polaires, pour lesquelles $\rho \geq 0$ le système ci-dessus équivaut au suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{a}{\sqrt{cos(2\theta)}} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z} : \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4} + k\,\pi ; \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi\right[\end{cases}$$

Une équation polaire de $(\mathcal{C})$ est donc :

$$\rho = f(\theta)$$

avec :

$$\boxed{f(\theta) = \frac{a}{\sqrt{cos(2\theta)}}}$$

et :

$$\boxed{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\,\pi ; \frac{\pi}{4} + k\,\pi\right[}$$

Notons alors que l'on a :

$$f(\theta + 2\,\pi) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho, \theta + 2\,\pi) \in (\mathcal{C})$$

On peut donc se limiter à l'étude de la courbe sur un intervalle de longueur $2\,\pi$

$$f(\theta + \pi) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho, \theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho, \theta + \pi) \in (\mathcal{C})$$

à savoir la symétrie de la courbe par rapport à O. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur π, par exemple :

$$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Et compte tenu du domaine de définition :

$$\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$$

Mais on a également :

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

ce qui traduit :

$$M(\rho,\theta) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M(\rho,-\theta) \in (\mathcal{C})$$

à savoir la symétrie de la courbe par rapport à l'axe (O,x). Il suffit donc d'étudier la courbe sur un l'intervalle :

$$\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$$

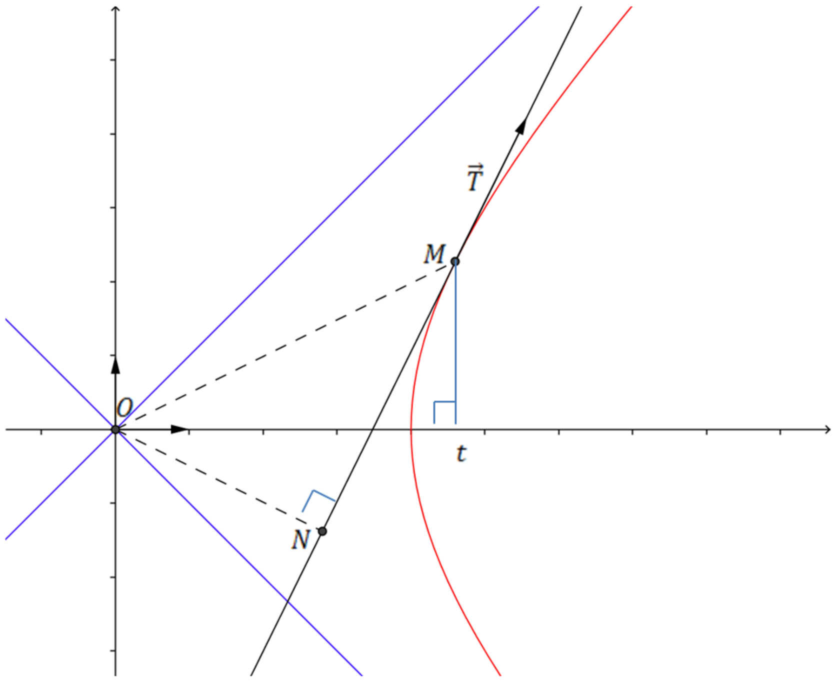
La portion de courbe $(\mathcal{C}_1)$ représentée est alors celle contenue dans le domaine $x \geq 0$ et $y \geq 0$

b)

Considérons pour la portion de courbe $(\mathcal{C}_1)$ un paramétrage cartésien par l'abscisse :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$$

avec : $t \in [a;+\infty[$



Un vecteur tangent au point M de paramètre t est alors dans la base du repère :

$$\vec{T}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - a^2}} \end{pmatrix}$$

Il est colinéaire à :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} \sqrt{t^2 - a^2} \\ t \end{pmatrix}$$

Le projeté orthogonal N de O sur $(M, \vec{T})$ est alors donné par la relation :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MO} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\, \vec{w}$$

Soit :

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\, \vec{w}$$

Or :

$$\begin{cases} \|\vec{w}\|^2 = 2\,t^2 - a^2 \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{w} = 2\,t\,\sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes de N sont donc :

$$\begin{cases} x_N = t - \dfrac{2\,t\,\sqrt{t^2-a^2}}{2\,t^2-a^2}\,\sqrt{t^2-a^2} = \dfrac{a^2\,t}{2\,t^2-a^2} \\ y_N = \sqrt{t^2-a^2} - \dfrac{2\,t\,\sqrt{t^2-a^2}}{2\,t^2-a^2}\,t = -\dfrac{a^2\,\sqrt{t^2-a^2}}{2\,t^2-a^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\rho_N = \|\overrightarrow{ON}\| = \frac{a^2}{2\,t^2-a^2}\,\sqrt{t^2+t^2-a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{2\,t^2-a^2}}$$

Posons : $\theta_N = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{ON}\right)$ alors :

$$\begin{cases} cos(\theta_N) = \dfrac{x_N}{\rho_N} = \dfrac{a^2\,t}{2\,t^2-a^2}\,\dfrac{\sqrt{2\,t^2-a^2}}{a^2} = \dfrac{t}{\sqrt{2\,t^2-a^2}} = g(t) \\ sin(\theta_N) = \dfrac{y_N}{\rho_N} = -\dfrac{a^2\,\sqrt{t^2-a^2}}{2\,t^2-a^2}\,\dfrac{\sqrt{2\,t^2-a^2}}{a^2} = -\dfrac{\sqrt{t^2-a^2}}{\sqrt{2\,t^2-a^2}} = h(t) \end{cases}$$

Ainsi :

$$tan(\theta_N) = -\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t}$$

Soit :

$$t\,tan(\theta_N) = -\sqrt{t^2-a^2}$$

$$t^2\,tan^2(\theta_N) = t^2 - a^2$$

$$t^2 = \frac{a^2}{1-tan^2(\theta_N)}$$

$$2\,t^2 - a^2 = \frac{2\,a^2}{1-tan^2(\theta_N)} - a^2 = a^2\,\frac{1+tan^2(\theta_N)}{1-tan^2(\theta_N)} = a^2\,\frac{cos^2(\theta_N)+sin^2(\theta_N)}{cos^2(\theta_N)-sin^2(\theta_N)}$$

$$= \frac{a^2}{cos(2\,\theta_N)}$$

donc :

$$\rho_N = \frac{a^2}{\dfrac{a}{\sqrt{cos(2\,\theta_N)}}} = a\,\sqrt{cos(2\,\theta_N)}$$

Etudions maintenant $g(t)$ et $h(t)$ afin de déterminer le domaine décrit par θ_N

$$g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\,t^2 - a^2}}$$

$$g'(t) = \frac{1 - t\,\dfrac{4\,t}{2\,\sqrt{2\,t^2 - a^2}}}{2\,t^2 - a^2} = -\frac{a^2}{(2\,t^2 - a^2)\,\sqrt{2\,t^2 - a^2}} < 0$$

Donc g est strictement décroissante. De plus :

$$g(a) = 1$$

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$g([a; +\infty[\,) = \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$$

$$h(t) = -\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{\sqrt{2\,t^2 - a^2}} = -\sqrt{\frac{t^2 - a^2}{2\,t^2 - a^2}}$$

h a les variations opposées à :

$$k(t) = \frac{t^2 - a^2}{2\,t^2 - a^2}$$

et :

$$k'(t) = \frac{2\,t\,(2\,t^2 - a^2) - 4\,t\,(t^2 - a^2)}{(2\,t^2 - a^2)^2} = \frac{2\,a^2\,t}{(2\,t^2 - a^2)^2} > 0$$

donc k est strictement croissante et h strictement décroissante. De plus :

$$h(a) = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$h([a; +\infty[\,) = \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right]$$

Donc, quand le paramètre t décrit $[a; +\infty[$ θ_N décrit (à une translation de $2\,\pi$) près continument l'intervalle :

$$\left]-\frac{\pi}{4}; 0\right]$$

Finalement, la portion de courbe associée à $(\mathcal{C}_1)$ peut être décrite par l'équation polaire:

$$\rho = a\,\sqrt{cos(2\,\theta)} \quad ,\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right]$$

En notant que la fonction de θ ci-dessus est invariante par changement de θ en $-\theta$ et en $\theta + \pi$, on peut décrire l'ensemble de la courbe $\mathfrak{D}$ par l'équation polaire :

$$\boxed{\rho = a\,\sqrt{cos(2\,\theta)} \quad ,\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\,\pi\,; \frac{\pi}{4} + k\,\pi\right[}$$

Etudions cette courbe sur $\left]-\frac{\pi}{4}; 0\right]$:

$$\rho' = a\,\frac{-2\,sin(2\,\theta)}{\sqrt{cos(2\,\theta)}} \geq 0$$

ρ' ne s'annulant qu'en 0, ρ est strictement croissante.

Posons :

$$\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}(\theta) = -sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$

La tangente au point N a pour vecteur directeur :

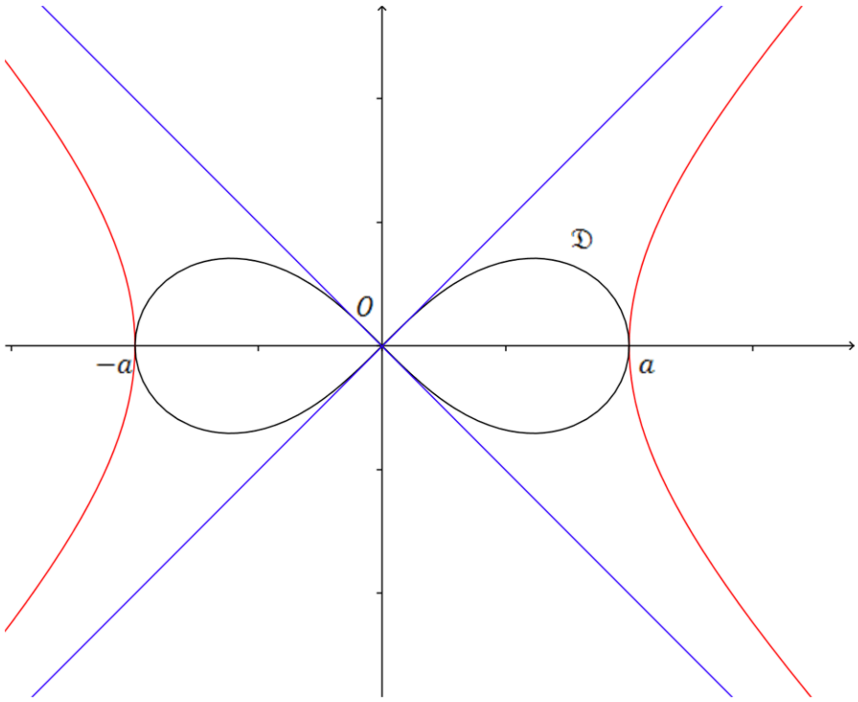
$$\vec{T}(\theta) = \rho'\,\vec{u}(\theta) + \rho\;\vec{v}(\theta)$$

Soit en 0 :

$$\vec{T}(0) = a\;\vec{v}(0) = a\,\vec{\jmath}$$

En $-\frac{\pi}{4}$ la courbe est prolongeable du point O par continuité. Le prolongement présente un point stationnaire en $(\rho' = \rho = 0)$. La tangente en ce point a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. C'est donc la droite d'équation $y = -x$

Pour obtenir la courbe complète, on procède à une symétrie de centre O et une symétrie d'axe (O, x)



6)

Soit M un point de $\mathfrak{D}$ de coordonnées polaires (ρ, θ) alors :

$$MA^2 = (\rho\, cos(\theta) - b)^2 + \big(\rho\, sin(\theta)\big)^2 = \rho^2 - 2\,\rho\, b\, cos(\theta) + b^2$$

$$\begin{aligned} MB^2 &= \rho^2 + 2\,\rho\, b\, cos(\theta) + b^2 \\ MA^2 \times MB^2 &= \big(\rho^2 + b^2 - 2\,\rho\, b\, cos(\theta)\big)\,\big(\rho^2 + b^2 + 2\,\rho\, b\, cos(\theta)\big) \\ &= (\rho^2 + b^2)^2 - 4\,\rho^2 b^2\, cos^2(\theta) \\ &= \rho^4 + 2\,\rho^2 b^2 + b^4 - 4\,\rho^2 b^2\, cos^2(\theta) \\ &= \rho^4 + 2\,\rho^2 b^2 + b^4 - 2\,\rho^2 b^2\big(\,1 + cos(2\theta)\big) \\ &= \rho^4 + b^4 - 2\,\rho^2 b^2 cos(2\theta) \\ &= \rho^2\,\big(\rho^2 - 2\,b^2 cos(2\theta)\big) + b^4 \end{aligned}$$

Ainsi , une condition suffisante pour que $MA \times MB$ ne dépende pas de θ est :

$$\rho^2 = 2\,b^2 cos(2\theta)$$

et elle est obtenue en prenant :

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

On a donc :

$$M \in \mathfrak{D} \Rightarrow MA \times MB = \frac{a^2}{2}$$

Réciproquement : Soit les points :

$$A\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right) , \qquad B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

et M un point tel que :

$$MA \times MB = \frac{a^2}{2}$$

alors d'après ce qui précède :

$$MA^2 \times MB^2 = \rho^2 \left(\rho^2 - a^2 cos(2\theta)\right) + \frac{a^4}{4}$$

Donc :

$$\rho^2 \left(\rho^2 - a^2 cos(2\theta)\right) + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}$$

$$\rho^2 \left(\rho^2 - a^2 cos(2\theta)\right) = 0$$

$$\rho^2 = 0 \;\; ou \;\; \rho^2 - a^2 cos(2\theta) = 0$$

$$\rho = 0 \;\; ou \;\; \rho = a\sqrt{cos(2\theta)}$$

Ainsi :

$$MA \times MB = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \; M \in \mathfrak{D}$$

D'où, en désignant par $\mathcal{P}$ le plan de la courbe :

$$\boxed{\mathfrak{D} = \left\{ M \in \mathcal{P} : \; MA \times MB = \frac{a^2}{2} \right\}}$$

Exercice 5 :

1)

a) Si f admet une limite L en $(0,0)$ alors en particulier, on a :

$$L = \lim_{x \to 0} f(x, 0)$$

Or si $x \neq 0$:

$$f(x,0) = x$$

donc L ne peut être que 0. Montrons maintenant que f a bien pour limite 0 quand (x, y) tend vers $(0,0)$ en cherchant une majoration du type :

$$|f(x,y)| \leq K \, \|(x,y)\|$$

où Kest une constante et $\|(x,y)\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$

Notons ainsi que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ on a :

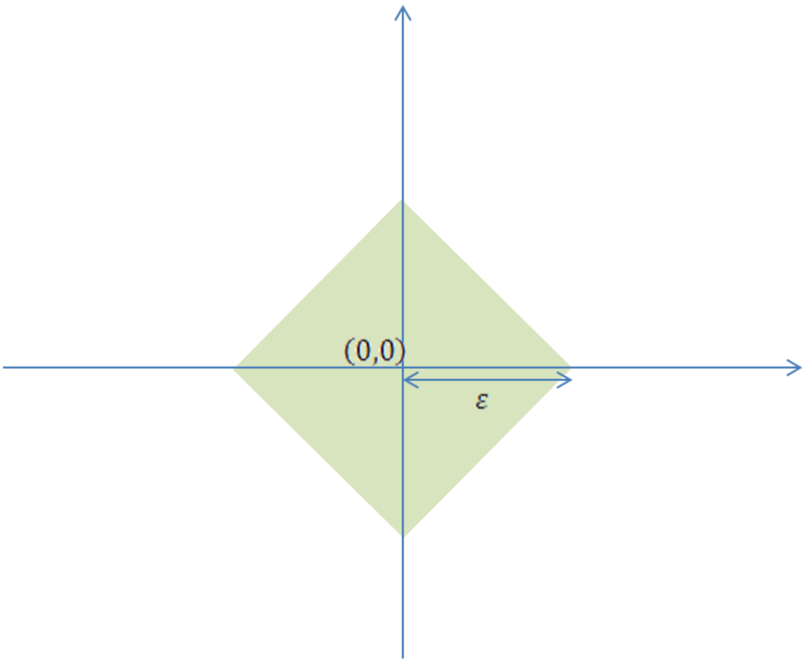
$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \, |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, |y| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$$

Donc :

Pour $\varepsilon > 0$, en prenant $\alpha = \varepsilon$ on a :

$$\forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \; : \quad \|(x,y)\|_1 < \alpha \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

Cela se traduit géométriquement, rappelons le par le fait, que $|f(x,y)|$ est strictement inférieure à ε sur une boule ouverte de rayon ε associée à la norme 1 qui n'est autre que le carré de demi diagonale ε de la figure ci-dessous.



et ainsi :

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

b) Voyons si f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{-y^3}{y^3} = -1$$

Donc f admet des dérivées partielles qui sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \end{cases}$$

Posons :

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y}{\|(x,y)\|_2}$$

$$= \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \left(\frac{x^3 - y^3 - (x^2 + y^2)(x - y)}{x^2 + y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y\, x^2 - x\, y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si on se donne une courbe de la forme $x = t\, y$ par exemple avec $t = 2$, on a :

$$\varepsilon(2\, y, y) = \frac{4\, y^3 - 2\, y^3}{(4\, y^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$$

Donc :

$$\lim_{y \to 0} \varepsilon(2\, y, y) \neq 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) \neq 0}$$

f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$. f est donc de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

2)

a) On a pour $x \neq 0$

$$f(x,0) = x$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$$

et la fonction $f(x,0)$ si on inclut x =0 décrit donc par continuité $\mathbb{R}$.

f n'a donc ni maximum ni minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ et l'image de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$

b)

Notons tout d'abord que l'on a :

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$f(x,y) > 0 \Leftrightarrow x^3 > y^3$$

$$\Leftrightarrow x > y$$

$$f(y,x) = -f(x,y)$$

Ces remarques permettent d'affirmer que la nappe d'équation $z = f(x,y)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y, z = 0$. Notons alors :

$$\mathfrak{D}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$$

$$\mathfrak{D}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

$$\mathfrak{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

Si $\mathcal{K}$ est alors un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$symétrique par rapport à $\mathfrak{D}_0$, on aura :

f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{K}$ et le maximum de f n'est atteint que sur $\mathcal{K} \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{K} \cap \mathfrak{D}_-$. De plus :

$$Min_{\mathcal{K}\cap\mathfrak{D}_-}(f) = -Max_{\mathcal{K}\cap\mathfrak{D}_+}(f)$$

Reste à savoir si le maximum ou le minimum peut être atteint en un point intérieur à $\mathcal{K}$ en étudiant les points stationnaires. Pour cela on résout pour $M \neq O$ le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{3\,x^2\,(x^2+y^2) - \,2\,x\,(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x\,(x^3+3\,x\,y^2+2\,y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

De même par échange de x et de y et inversion de signe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-y\,(y^3+3\,y\,x^2+2\,x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

Ainsi le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} x\,(x^3+3\,x\,y^2+2\,y^3) = 0 \\ y\,(y^3+3\,y\,x^2+2\,x^3) = 0 \end{cases}$$

Notons que $x = 0$ ou $y = 0$ ne conduit à aucune solution, donc le système équivaut à :

$$\begin{cases} x^3+3\,x\,y^2+2\,y^3 = 0 \\ y^3+3\,y\,x^2+2\,x^3 = 0 \end{cases}$$

Or la différence des deux équations donne :

$$x^3 - y^3 + 3\,x\,y^2 - 3\,y\,x^2 + 2\,y^3 - 2\,x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\,(x^3-y^3) - 3\,x\,y\,(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+x\,y+y^2) + 3\,x\,y\,(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+4\,x\,y+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x^2+4\,x\,y+y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; (x+2y)^2 - 3\,y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x + 2y = \sqrt{3}\,y \;\; ou \; x + 2y = -\sqrt{3}\,y$$

$$\Leftrightarrow x = y \;\; ou \;\; x = \left(-2+\sqrt{3}\right) y \;\; ou \; x = \left(-2-\sqrt{3}\right) y \; y$$

Or $x = y$ reporté dans le système précédent conduit à $x = y = 0$ donc aucune solution. Voyons pour les deux autres cas tous deux définis par :

$$x = \left(-2 + \varepsilon\,\sqrt{3}\right) y$$

Avec $\varepsilon = 1 \; ou -1$

Reportant dans la première équation du système on obtient :

$$\left(-2+\varepsilon\,\sqrt{3}\right)^3 y^3 + 3\left(-2+\varepsilon\,\sqrt{3}\right)^2 y^3 + 2\;\; y^3 = 0$$

Soit, compte tenu de $y \neq 0$:

$$\left(-2+\varepsilon\,\sqrt{3}\right)^2 \;\left(\left(-2+\varepsilon\,\sqrt{3}\right)+3\right) + 2 = 0$$

$$\left(7 - 4\,\varepsilon\,\sqrt{3}\right)\left(1+\varepsilon\,\sqrt{3}\right) + 2 = 0$$

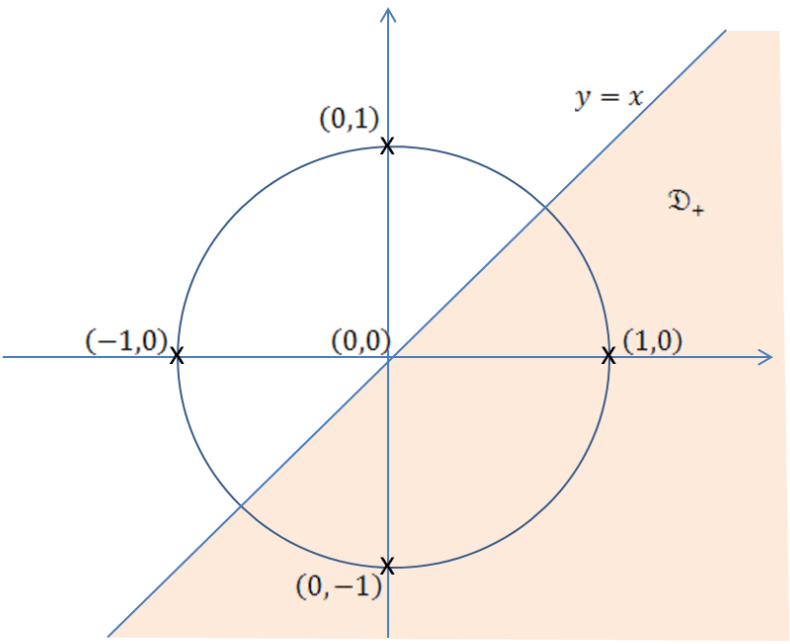
$$7 - 12 + 7\,\varepsilon\,\sqrt{3} - 4\,\varepsilon\,\sqrt{3} + 2 = 0$$

$$4 - 3\,\varepsilon\,\sqrt{3} = 0$$

ce qui est absurde car ce dernier nombre est un irrationnel.

f n'admet donc aucun point stationnaire donc ni maximum ni minimum local ou global.

La restriction g de f au disque $\mathcal{A}$ de centre (0,0) et de rayon 1 atteint donc son maximum et son minimum sur le cercle $\mathcal{C}_0$ de centre (0,0) et de rayon 1 et plus précisément le maximum sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_-$



Or sur $\mathcal{C}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ on a :

$$x^2 + y^2 = 1$$

donc

$$|x| \leq 1\,, \quad |y| \leq 1$$

et si $|x| < 1 \; ou \;\; |y| < 1$ alors

$$f(x,y) = x^3 - y^3 \leq |x|^3 + |y|^3 < |x|^2 + |y|^2 = 1$$

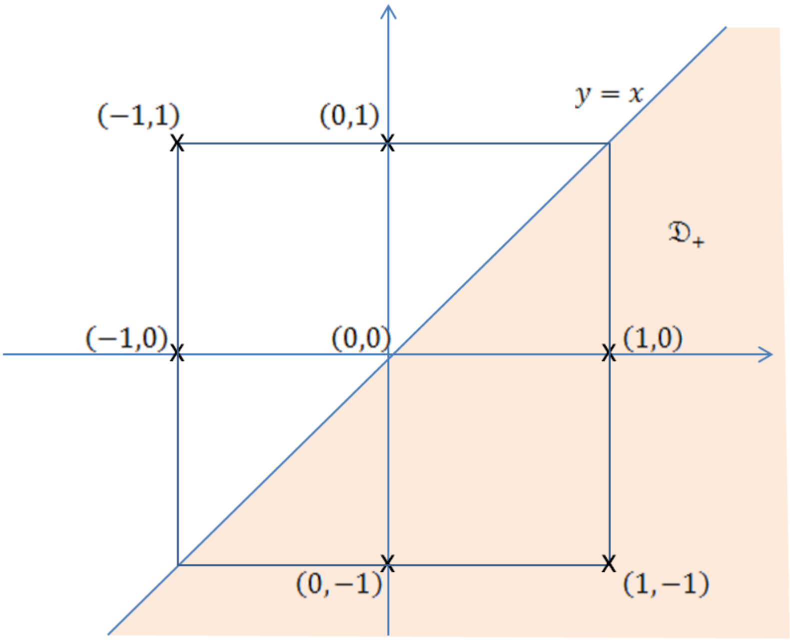
Or :

$$f(1,0) = f(0,-1) = 1$$

donc g admet sur $\mathcal{A}$ un maximum égal à 1 atteint en $(1,0)$ et $(0,-1)$ et par symétrie un minimum égal à -1 atteint en $(0,1)$ et $(-1,0)$

c)

La restriction h de f au carré $\mathcal{B} = [-1,1]^2$ atteint donc son maximum et son minimum sur la frontière $\mathcal{B}_0$ de ce carré et plus précisément le maximum sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ et le minimum sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_-$



Or sur $\mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{D}_+$ on a :

si $y \neq 0$ et $|y| < 1$ alors

$$f(1, y) = \frac{1 - y^3}{1 + y^2} \leq \frac{1 + |y|^3}{1 + y^2} < \frac{1 + y^2}{1 + y^2} = 1$$

si $x \neq 0$ et $|x| < 1$ alors

$$f(x, 0) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \leq \frac{|x|^3 + 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$$

Or :

$$f(1{,}0) = f(0, -1) = f(1, -1) = 1$$

$$f(-1{,}1) = -1$$

donc h admet sur $\mathcal{B}$ un maximum égal à 1 atteint en $(1{,}0)$, $(0, -1)$ et $(1, -1)$ et par symétrie un minimum égal à -1 atteint en $(0{,}1)$ et $(-1{,}0)$ et $(-1{,}1)$