Concours public d'ingénieur des services techniques
ouvert à partir du 26 mars 2012
pour 6 postes

Composition de mathématiques

(*Durée 4 h - coefficient 3*)

***

Ce feuillet comporte 5 pages :

- la présente page de garde
- l'énoncé du sujet (pages 1 à 4)

Distribué en même temps que le sujet (en début d'épreuve). Af.

N.B : Erratum

Corriger les questions de l'exercice 2 ainsi :

b) Montrer que la fonction g est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - xy = 1 \qquad (E)$$

d) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E), développables en série entière, et déterminer parmi celles-ci la fonction g.

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.

Exercice 1 *On considère la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 15 \\ -3 & -2 & 18 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A par rapport à la base canonique.

1) Montrer qu'il existe un réel unique a tel que la matrice B définie par l'égalité :

$$B = A - aI_3$$

où I_3 est la matrice unité, vérifie l'égalité :

$$B^3 = 0$$

où 0 est la matrice nulle. Vérifier que B^2 n'est pas la matrice nulle.

2) Montrer que si U est une matrice colonne à 3 éléments telle que B^2U n'est pas la matrice nulle, le système (B^2U, BU, U) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer alors la matrice de u par rapport à une telle base.
En déduire que la matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure que l'on précisera.

3) Déterminer la solution générale du système différentiel :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont des fonctions réelles d'une variable réelle dérivables inconnues.

Exercice 2 *On considère la fonction f réelle de deux variables réelles x et t définie par :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x,t) = e^{x \sin t}$$

et la fonction g réelle de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin t}\, dt$$

1) a) Montrer que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de classe C^1, et déterminer une expression de la dérivée $g'(x)$.
Préciser le signe de $g'(x)$.
b) Démontrer la double inégalité :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$$

c) En déduire une majoration de $g(x)$ pour x négatif ou nul, et une minoration de $g(x)$ pour x positif ou nul.
d) Déterminer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Déterminer la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
e) Déterminer les variations de g et tracer sa représentation graphique.

2) a) Montrer que la fonction g est développable en série entière.
On écrira ce développement sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on exprimera a_n à l'aide de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$$

NB : on ne cherchera pas à calculer une expression de I_n.
b) Montrer que la fonction g est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - xy = 0 \qquad (E)$$

c) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_{n-1} pour tout entier naturel n non nul.
d) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E), et déterminer parmi celles-ci la fonction g.

3) La fonction g est-elle intégrable sur $]-\infty, 0]$?

Exercice 3 *Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé Oxy.*
1) On considère la courbe (C) d'équation cartésienne :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

où a est un réel strictement positif.
Préciser la nature de la courbe (C).
Tracer la courbe (C).

2) a) Déterminer une équation polaire de la courbe (C) sous la forme :

$$\rho = f(\theta)$$

où f est une fonction que l'on déterminera.
On précisera l'ensemble de définition de f.
b) Soit (D) l'ensemble des projections orthogonales du point O sur les tangentes à la courbe (C).
Déterminer une équation polaire de la courbe (D).
Etudier et tracer la courbe (D).

3) Montrer qu'il existe un réel b strictement positif, que l'on calculera en fonction de a, tel que, étant donné les points $A(-b, 0)$ et $B(b, 0)$, la courbe (D) est l'ensemble des points M du plan tel que le produit des distances $MA \times MB$ est égal à une constante réelle que l'on précisera.

Exercice 4 *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.*
1) Soit φ l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \sin[(n+1)u] = \sin u \; P_n(\cos u)$$

et montrer que P_n est de degré n.
b) Montrer qu'il existe un polynôme A tel que :

$$\forall n \geq 2, P_n(X) = A(X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

c) Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, P_4.

3) a) Montrer que les polynômes P_n sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire φ.
b) Pour tout polynôme P de la forme :

$$P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$$

on définit $g(P) = \varphi(P, P)$.
Montrer que la fonction g présente un minimum pour un quadruplet unique (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$, que l'on déterminera, et calculer la valeur de ce minimum.

Exercice 5 *1) a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction réelle de deux variables réelles f définie par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

et définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Quelle est la valeur de $f(0,0)$?
b) La fonction f est-elle de classe C^1 ?

2) a) Montrer que f n'a pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser l'image de $\mathbb{R}^2$ par f.
b) Soit A le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Montrer que la restriction g de f à A admet un minimum m et un maximum M, et déterminer les points où la valeur m est atteinte par g, et les points où la valeur M est atteinte par g.
c) Soit $B = [-1, 1]^2$.
Montrer que la restriction h de f à B admet un minimum s et un maximum S, et déterminer les points où la valeur s est atteinte par h, et les points où la valeur S est atteinte par h.

FIN DE L'ENONCE