Corrigé sujet 2014

Exercice 1 :

1) On a :

$$\forall\ (X, Y, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{C} :$$

$$\varphi_A(X+Y) = A\ (X+Y) = A\ X + A\ Y = \varphi_A(X) + \varphi_A(Y)$$

$$\varphi_A(\alpha\ X) = A\ (\alpha\ X) = \alpha\ \varphi_A(X)$$

donc φ_A est linéaire et donc un endomorphisme du $\mathbb{C}$ −espace $\mathbb{E}$

2) La condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit inversible est que son noyau soit réduit au vecteur nul. Or, en désignant par $0_{\mathbb{E}}$ la matrice nulle de $\mathbb{E}$:

$$\varphi_A(X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow\ A\ X = 0_{\mathbb{E}}$$

Donc :

Si A inversible : $\varphi_A(X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow\ A^{-1}(A\ X) = 0_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow\ X = 0_{\mathbb{E}}$ et le noyau de φ_A se réduit à la matrice nulle de $\mathbb{E}$ donc φ_A est injective donc est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Si A non inversible : $\exists\ V_1 \in M_{n1}(\mathbb{C}) : A\ V_1 = 0$. Considérons alors la matrice X_1 de $\mathbb{E}$ dont la première colonne est V_1et les $n-1$ colonnes restantes sont des colonnes nulles. Alors :

$$\varphi_A(X_1) = A\ X_1 = 0_{\mathbb{E}}$$

Donc le noyau de φ_A n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathbb{E}$ et ainsi φ_A n'est pas injective. Il en résulte :

$$\boxed{\varphi_A \text{ automorphisme de } \mathbb{E} \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$$

Déterminons alors la réciproque de φ_A

$$\forall\ (X, Y) \in \mathbb{E}^2:$$

$$\varphi_A(X) = Y \Leftrightarrow\ A\ X = Y \Leftrightarrow\ X = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = \varphi_{A^{-1}}(Y)$$

Donc :

$$\boxed{(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}}$$

3)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b\,c & a\,c + c\,d \\ a\,b + b\,d & b\,c + d^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(A)\,A = (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a\,d & a\,c + d\,c \\ a\,b + d\,b & a\,d + d^2 \end{pmatrix}$$

$$det(A)\,I_2 = (a\,d - b\,c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,d - b\,c & 0 \\ 0 & a\,d - b\,c \end{pmatrix}$$

On vérifie alors aisément :

$$A^2 - tr(A)\,A + det(A)\,I_2 = O_2$$

A noter qu'il s'agit du théorème de Cayley Hamilton énonçant que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est un polynôme annulateur de cette matrice

Notons les propriétés triviales à démontrer de φ_A :

$$\varphi_{O_2} = 0$$

$$\varphi_{A+B} = \varphi_A + \varphi_B$$

$$\varphi_{\alpha\,A} = \alpha\,\varphi_A$$

$$\varphi_{A\,B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

$$\varphi_{I_2} = I$$

Ainsi :

$$\varphi_{A^2 - tr(A)\,A + det(A)\,I_2} = \varphi_{O_2}$$

donc :

$$(\varphi_A)^2 - tr(A)\,\varphi_A + det(A)\,\varphi_{I_2} = 0$$

d'où :

$$\boxed{(\varphi_A)^2 - tr(A)\,\varphi_A + det(A)\,I = 0}$$

4) On suppose $n = 2$ et A diagonalisable

<u>Premier cas</u> : A n'a qu'une valeur propre λ alors :

$$A = \lambda\,I_2$$

Ainsi :

$$\varphi_A = \varphi_{\lambda\, I_2} = \lambda\, \varphi_{\, I_2} = \lambda\, I$$

donc φ_A est diagonalisable avec pour unique valeur propre λ si $\lambda \neq 0$

Deuxième cas : A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Soit alors deux vecteurs propres non nuls V_1 et V_2 associés respectivement à chaque valeur propre. On a :

$$A\, V_1 = \lambda_1\, V_1 \quad , A\, V_2 = \lambda_2\, V_2$$

Soit X_{11} la matrice carrée d'ordre 2 dont la première colonne est V_1 et la seconde la colonne nulle et X_{12} la matrice carrée d'ordre 2 dont la première colonne est la colonne nulle et la seconde la colonne V_1. Alors on a :

$$\varphi_A(X_{11}) = \lambda_1\, X_{11}$$

$$\varphi_A(X_{12}) = \lambda_1\, X_{12}$$

Ainsi X_{11} et X_{12} forme un système libre de vecteurs propres associés à λ_1

On peut définir de façon analogue deux matrices carrées X_{21} et X_{22} formant un système libre de vecteurs propres associés à λ_2

La famille $(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ forme alors une base de vecteurs propres de φ_A donc φ_A est diagonalisable

5)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminons de polynôme caractéristique de A:

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -2 - X & 4 \\ -5 & 7 - X \end{vmatrix} = (-2 - X)\,(7 - X) + 20$$

$$= X^2 - 5\, X + 6 = (X - 2)\,(X - 3)$$

Le polynôme caractéristique de A étant scindé avec des racines simples, A est diagonalisable et admet pour valeurs propres 2 et 3

Déterminons une base de vecteurs propres.

Pour $\lambda = 2$ on résout pour une colonne à deux lignes X:

$$(A - 2\, I_2)\, X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\,x + 4\,y = 0 \\ -5\,x + 5\,y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ x = y$$

Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 2 est donc :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, on résout :

$$(A - 3\,I_2)\,X = 0$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\,x + 4\,y = 0 \\ -5\,x + 4\,y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ 5\,x = 4\,y$$

Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 3 est donc :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Une base de vecteurs propres de φ_A est alors :

$$(V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22})$$

avec :

$$V_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ , V_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\ , V_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1) On a :

$$sin^x(t) = e^{x\,Ln(sin(t))}$$

La fonction à intégrer est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable au sens de Riemann sur tout sous intervalle de cet ensemble. Le problème de la convergence de l'intégrale impropre se pose en 0. Or en 0 :

$$e^{x\,Ln(sin(t))} = e^{x\,Ln(t+o(t))}$$

$$= e^{x\,Ln(t)+\,Ln(1+o(1))} = e^{x\,Ln(t)}\;e^{x\,Ln(1+o(1))}$$

$$\sim\; t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale impropre converge est donc :

$$-x < 1$$

Soit :

$$x > -1$$

f est donc bien définie sur $]-1; +\infty[$

2) Définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} sin^x(t)\,dt$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ tend simplement sur$]-1; +\infty[$ vers $f(x)$

Or $g(x,t) = sin^x(t)$ est une fonction de deux variables continue sur $]-1; +\infty[\, \times \left[\frac{1}{n}; \frac{\pi}{2}\right]$ et admet sur ce domaine une dérivée partielle continue qui est :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = Ln\big(sin(t)\big)\;sin^x(t)$$

Donc $f_n(x)$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et :

$$f_n{}'(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\,sin^x(t)\,dt$$

Or en 0 :

$$Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t) = Ln\big(t + o(t)\big)\ sin^x(t)$$

$$= \big(Ln(t) + Ln(1 + o(1))\big)\ sin^x(t) \sim\ Ln(t)\ t^x = \frac{Ln(t)}{t^{-x}}$$

Donc l'intégrale impropre est convergente. Ainsi ${f_n}'(x)$ tend simplement sur $]-1;+\infty[$ vers la fonction :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t)\ dt$$

Soient $a < b$ tels que $[a;b] \subset]-1;+\infty[$ montrons que la convergence précédente est uniforme sur $[a;b]$ en considérant :

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left|\int_0^{\frac{1}{n}} Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t)\ dt\right|$$

$$|f_n'(x) - g(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \big|Ln\big(sin(t)\big)\big|\ e^{x\,Ln(sin(t))}\ dt$$

Or sur $[a;b]$:

$$x\ Ln\big(sin(t)\big) \leq a\ Ln\big(sin(t)\big)$$

donc :

$$e^{x\,Ln(sin(t))} \leq e^{a\,Ln(sin(t))}$$

Donc :

$$|f_n'(x) - g(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \big|Ln\big(sin(t)\big)\big|\ e^{a\,Ln(sin(t))}\ dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \big|Ln\big(sin(t)\big)\big|\ e^{a\,Ln(sin(t))}\ dt$$

La quantité majorante étant indépendante de x et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, la convergence est uniforme sur $[a;b]$. On en déduit que f est dérivable sur $[a;b]$ et que :

$$f'(x) = g(x)$$

De plus $f_n'(x)$ étant continue sur $[a;b]$ la limite uniforme de cette suite de fonctions est continue sur $[a;b]$ ce qui montre que f est de classe C_1 sur $[a;b]$ donc sur $]-1;+\infty[$

Or sur $\left[\frac{1}{n};\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t) \leq 0$$

Et cette dernière fonction est continue et non identiquement nulle, on en déduit :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} Ln\big(sin(t)\big)\ sin^x(t)\ dt < 0$$

D'autre part, cette suite est décroissante, donc sa limite est strictement négative. Ainsi :

$$f'(x) < 0$$

f est donc strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

3) On a sur $]-1;+\infty[$:

$$f(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{x+2}(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\ sin^{x+1}(t)\ dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = sin(t), \qquad u(t) = -cos(t)$$

$$v(t) = sin^{x+1}(t), \qquad v'(t) = (x+1)\ sin^x(t)\ cos(t)$$

$$f(x+2) = [-cos(t)\ sin^{x+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\ sin^x(t)\ dt$$

$$= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - sin^2(t)\big)\ sin^x(t)\ dt = (x+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^x(t)\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{x+2}(t)\ dt\right)$$

soit :

$$f(x+2) = (x+1)\ (f(x) - f(x+2))$$

D'où :

$$\boxed{f(x+2) = \frac{x+1}{x+2}\ f(x)}$$

4) Pour $x > 0$ on a :

$$h(x+1) = (x+1)\, f(x+1)\, f(x)$$

$$= (x+1)\, \frac{x}{x+1}\, f(x-1)\, f(x)$$

$$= x\, f(x-1)\, f(x) = h(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h(n) = h(1) = f(1)f(0)$$

Or :

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^1(t)\, dt = [-\, cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

D'où :

$$\boxed{h(n) = \frac{\pi}{2}}$$

5) On a en (-1) :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) \sim \frac{1}{x+1} f(1) \ \sim \frac{1}{x+1}$$

6) Pour $x > 0$ on a :

$$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

$$\frac{x}{x+1} f(x-1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

Or $f(x-1) > 0$ donc :

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{f(x-1)} \leq 1$$

Le théorème des gendarmes conduit alors en $+\infty$ à :

$$f(x) \sim f(x-1)$$

Donc à :

$$h(x) \sim x\left(f(x)\right)^2$$

Notons alors $n(x)$ la partie entière de x qui vérifie :

$$n(x) \leq x < n(x)+1$$

Donc :

$$f(n(x)+2) \leq f(n(x)+1) < f(x) \leq f\big(n(x)\big)$$

Soit :

$$\frac{n(x)+1}{n(x)+2} f\big(n(x)\big) \leq f(x) \leq f\big(n(x)\big)$$

On en déduit :

$$f(x) \sim f\big(n(x)\big)$$

Or :

$$x \sim n(x)$$

$$f\big(n(x)\big) \sim f(n(x)-1)$$

$$n(x)\, f\big(n(x)\big)\, f(n(x)-1) = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$x\left(f(x)\right)^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}}$$

Exercice 5 :

$$\mathcal{C}_\alpha : \ x^\alpha + y^\alpha = 1, \qquad (x,y) \in [0,+\infty[^2$$

1) On a :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \in \mathcal{C}_\alpha \Rightarrow \ (y,x) \in \mathcal{C}_\alpha$$

donc $\mathcal{C}_\alpha$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$

2) Soit $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$ alors

$$\begin{cases} x^\alpha = e^{\alpha\, Ln(x)} > 0 \\ y^\alpha = e^{\alpha\, Ln(y)} > 0 \end{cases}$$

et :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim_{y\to 0^+} y^\alpha = 0 = 1 - 1^\alpha$$

donc la courbe peut être prolongée par continuité avec les points $A(0,1)$ et $B(1,0)$. De plus :

$$\begin{cases} x^\alpha = 1 - y^\alpha \leq 0 \\ y^\alpha = 1 - x^\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Les courbes $\mathcal{C}_\alpha$ se situent donc dans le carré $[0,1] \times [0,1]$

Etablissons une équation de la forme $y = f_\alpha(x)$

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_\alpha \Leftrightarrow \ y^\alpha = 1 - x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ y = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

La fonction associée est donc la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{1}{\alpha} Ln(1 - x^\alpha)} \text{ sur }]0,1[$$
$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 0$$

Etudions alors sur $]0,+\infty[$ pour x fixé dans $]0,1[$ la fonction :

$$g_x(t) = \frac{1}{t}\ Ln(1 - x^t)$$

$$g_x(t) = -\frac{1}{t^2}\ Ln(1 - x^t) - \frac{1}{t}\ Ln(x)\ \frac{x^t}{1 - x^t}$$

$$= \frac{-\,(1 - x^t)\ Ln(1 - x^t) - x^t\ Ln(x^t)}{t^2\ (1 - x^t)}$$

Or pour $u \in\ ]0,1[\ : -u\ Ln(u) > 0$ donc :

$$g_x{}'(t) > 0$$

g_x est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'où :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow\ g_x(\alpha_1) < g_x(\alpha_2) \Rightarrow\ f_{\alpha_1}(x) < f_{\alpha_2}(x)$$

Donc $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ sur $]0,1[$ et coupe $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ en 0 et en 1

Notons que sur $[0,1]$ x^α est strictement croissante, donc $1 - x^\alpha$ strictement décroissante, $Ln(1 - x^\alpha)$ strictement décroissante et donc f_α strictement décroissante. De plus sur $]0,1[$:

$$f_\alpha{}'(x) = -\alpha\ x^{\alpha-1}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

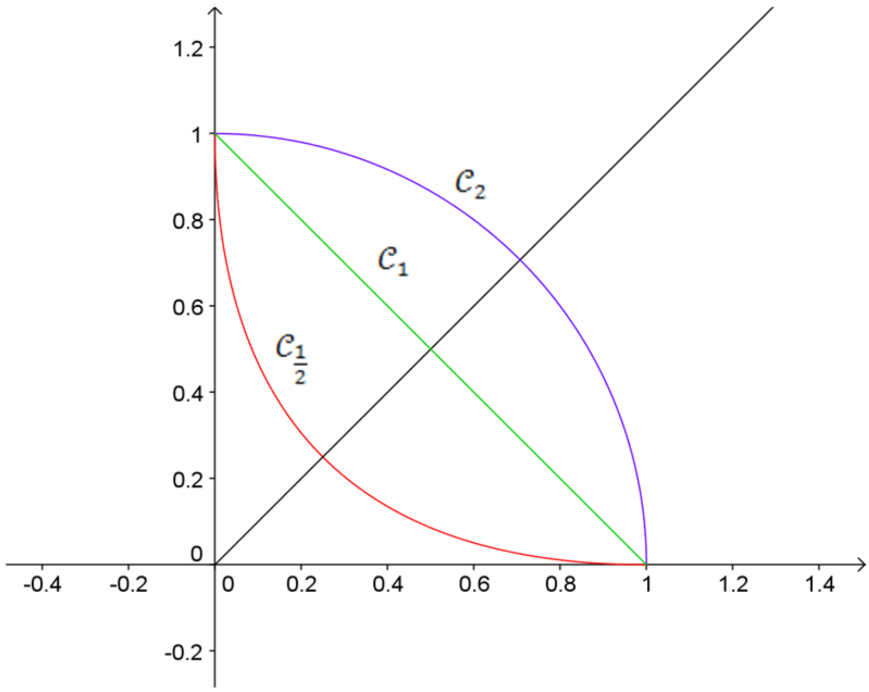
$$f_\alpha''(x) = -\alpha(\alpha - 1)\ x^{\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\alpha^2\ x^{2\,\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

$$= \alpha\ (\alpha - 1)\ x^{\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}\ (-(1 - x^\alpha) +\ 1)$$

$$= \alpha\ (\alpha - 1)\ x^{2\,\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

f_α'' est donc du signe de $\alpha - 1$ donc f_α est strictement concave si $\alpha < 1$ et strictement convexe si $\alpha > 1$

L'allure des courbes $\mathcal{C}_\alpha$ compte tenu de la symétrie, est alors la suivante :



3) Tangentes en 0 et en 1

Rappelons qu'en 0 nous avons :

$$e^u - 1 \sim u \,, \qquad Ln(1-u) \sim -u$$

donc en 0 nous avons :

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{\alpha}Ln(1-x^\alpha)} - 1}{x} \sim \frac{1}{x}\frac{1}{\alpha}\,Ln(1-x^\alpha) \sim \frac{1}{\alpha\, x}\,(-x^\alpha) \sim -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha}$$

D'où :

Si $0 < \alpha < 1$:

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\alpha\, x^{1-\alpha}} = +\infty$$

f_α n'est alors pas dérivable en 0 mais $\mathcal{C}_\alpha$ admet une demi tangente verticale à droite en 0 et par symétrie, une demi-tangente horizontale à gauche en 1

Si $\alpha > 1$:

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} = 0$$

f_α est alors dérivable en 0 et $f_\alpha{}'(0) = 0$. $\mathcal{C}_\alpha$ admet alors une demi tangente horizontale à droite en 0 et par symétrie, une demi-tangente verticale à gauche en 1

Si $\alpha > 1$: $\mathcal{C}_\alpha$ a pour équation $y = x$ et admet donc cette même droite pour tangente (demi) en 0 et en 1

4) Etude de $\mathcal{C}_{1/2}$

L'étude a été faite de façon générale ci-avant. Cependant, nous avons pour $M(x, y) \in \mathcal{C}_{1/2}$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

donc en élevant au carré :

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = 1$$

$$2\sqrt{x\,y} = 1 - x - y$$

en élevant à nouveau au carré :

$$4\,x\,y = 1 + x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,y + 2\,x\,y$$

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 2\,x + 2\,y - 1$$

$$(x - y)^2 = 2\,x + 2\,y - 1$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Finalement :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Posons :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, y - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nous définissons ainsi un changement de repère tel que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit en inversant la relation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Désignons par Ω le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ dans le repère orthonormé de référence $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du graphique et introduisons les vecteurs suivants :

$$\vec{I} : \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{J} : \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La relation matricielle ci-dessus s'écrit pour $M(x, y)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}$$

(X, Y) est donc le couple de coordonnées de M dans le repère orthonormé $\left(\Omega, \vec{I}, \vec{J}\right)$ donc il vérifie pour un point M de $\mathcal{C}_{1/2}$:

$$Y = \sqrt{2}\, X^2$$

$\mathcal{C}_{1/2}$ est donc une portion de parabole de sommet Ω d'axe $\left(\Omega, \vec{J}\right)$ c'est-à-dire la bissectrice intérieure du repère de référence.