Exercice 1 :

1a) $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1b) La matrice étant d'ordre impair, elle admet au moins une valeur propre réelle.

Soit alors λ une valeur propre réelle de M et V un vecteur propre non nul associé, alors :

$$M\,V = \lambda\ V$$

$$M^2\,V = M\,\lambda\ V = \lambda\ M\,V = \lambda^2\ V$$

$$(M - I_3)^2\,V = M^2\,V - 2\,M\,V + V = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 1)\,V = (\lambda - 1)^2\,V$$

$$(M - I_3)^2 = 0\ et\ V \neq 0\ donc\ (\lambda - 1)^2 = 0\ d'où\ \lambda = 1$$

M a donc pour unique valeur propre 1.

1c) $M \neq I_3$ donc M n'est pas diagonalisable. 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible.

2a) $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda\,I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de M sont donc 0 et 1.

2b) sous espaces propres

On pose :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$M\,V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x = y \end{cases}$$

$$(M - I_3)\,V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x = y + z$$

Donc :

$$\mathbb{E}_0 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad \mathbb{E}_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$dim(\mathbb{E}_0) + dim(\mathbb{E}_1) = 3$$

Donc M est diagonalisable

3a) $a \neq 0 \; et \; a \neq 1$

$$\det(M - \lambda\, I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & a-1 & -1 \\ 1-a & a-\lambda & a-1 \\ 1 & a-1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 1-a & a-\lambda & a-1 \\ 1 & a-1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-a & a-\lambda & 0 \\ 1 & a-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a-\lambda & 0 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de M sont donc a et 1.

3b) sous espaces associés

On pose :

$$V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$(M - I_3)\, V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + (a-1)\, y - z = 0 \\ (1-a)\, x + (a-1)\, y + (a-1)\, z = 0 \\ x + (a-1)\, y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(M - a\, I_3)\, V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)\, x + (a-1)\, y - z = 0 \\ (1-a)\, x + (a-1)\, z = 0 \\ x + (a-1)\, y - a\, z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

Donc :

$$\mathbb{E}_a = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad \mathbb{E}_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$dim(\mathbb{E}_a) + dim(\mathbb{E}_1) = 2 < 3$$

Donc M n'est pas diagonalisable

3 c) Posons

$$U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$M\, W = V + W \Leftrightarrow (M - I_3)\, W = V$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (a-1)\, y - z = 1 \\ (1-a)\, x + (a-1)\, y + (a-1)\, z = 0 \\ x + (a-1)\, y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (a-1)\, y - z = 1 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a^{-1} \\ x = a^{-1} + z \end{cases}$$

Si on prend donc $z = 0$ et :

$$W = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut définir la matrice de passage de la base canonique à la base : (U, V, W)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a^{-1} \\ 1 & 0 & a^{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M\,U = a\,U, \qquad M\,V = 1\,V, \qquad M\,W = 1\,V + 1\,W$$

La matrice de f dans cette base est donc la matrice T. Ainsi :

$$M\,P = P\,T$$

Soit :

$$M = P\,T\,P^{-1}$$

Exercice 2 :

1a) Soit $x \geq 1$. Sur $[1, x]$ on a :

$$\frac{e^t}{x} \leq \frac{e^t}{t}$$

Donc :

$$\int_1^x \frac{e^t}{x}\, dt \leq \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x)$$

1b) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2a) Pour $t \in [1, +\infty[$:

$$g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

$$g'(t) = \frac{t^3\, e^t - 3\, t^2\, e^t}{t^6} = \frac{t-3}{t^4}\, e^t$$

Donc :

$$g'(t) > 0\ sur\ [1,3[, \qquad g'(t) > 0\ sur\ ]3,+\infty[$$

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} g(t) = +\infty\, , g(1) = e$$

g est strictement décroissante sur $[1,3]$ et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ et présente un minimum en 3 égal à :

$$g(3) = \frac{e^3}{27}$$

2b) sur $[1,3]$ on a : $0 \leq g(t) \leq e$ donc :

$$0 \leq \int_1^3 g(t)dt \leq 2\, e$$

2c) Pour $x \geq 3$ on a :

$$0 \leq \int_3^x g(t)dt \leq \int_3^x g(x)dt = \frac{x-3}{x^3}\, e^x$$

3a) En intégrant par partie :

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, e^t\, dt = \left[\frac{1}{t}\, e^t\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, e^t\, dt$$

$$= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, e^t\, dt$$

3b) En intégrant à nouveau par partie :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{1}{t^2}\, e^t\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\, e^t\, dt$$

$$= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e + 2\int_1^x \frac{1}{t^3}\, e^t\, dt$$

4a)

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e + 2\int_1^3 g(t)dt + 2\int_3^x g(t)dt$$

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e + 4e + \frac{x-3}{x^3}\, e^x$$

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + 2\frac{e^x}{x^2} - 3\, \frac{e^x}{x^3} + 2\, e$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2\, e \sim \frac{e^x}{x} \sim \frac{e^x}{x} + 2\frac{e^x}{x^2} - 3\, \frac{e^x}{x^3} + 2\, e$$

On en déduit :

$$f(x) \sim \frac{e^x}{x}$$

Exercice 3 :

1a) sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ l'équation homogène équivaut à :

$$y' - \frac{2}{x}\,y = 0$$

Et la solution générale est de la forme :

$$y = c\,e^{2\,Ln|x|} = c\,x^2$$

1b) recherche de solution particulière $y = a\,x,\ \ y' = a$

$$x\,a - 2\,a\,x = x$$

Cette relation est vérifiée sur $\mathbb{R}$ pour $a = -1$

1c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes c et d telles que sur $]0,+\infty[$:

$$y = -x + c\,x^2$$

Et sur $]-\infty,0[$:

$$y = -x + d\,x^2$$

Par continuité :

$$y(0) = 0$$

Réciproquement, une fonction de la forme précédente est solution de l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$, dérivable en 0 et dérivée égale à -1 et :

$$0\,y'(0) - 2\,y(0) = 0$$

Donc y est solution de l'équation différentielle en 0. Elle l'est donc sur $\mathbb{R}$

2a) sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ l'équation homogène équivaut à :

$$y' + \frac{2}{x}\,y = 0$$

Et la solution générale est de la forme :

$$y = c\,e^{-2\,Ln|x|} = \frac{c}{x^2}$$

2b) recherche de solution particulière $y = b\,x,\ \ y' = b$

$$x\,b + 2\,b\,x = x$$

Cette relation est vérifiée sur $\mathbb{R}$ pour $b = \frac{1}{3}$

2c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes c et d telles que sur $]0,+\infty[$:

$$y = \frac{1}{3}\,x + \frac{c}{x^2}$$

Et sur $]-\infty, 0[$:

$$y = \frac{1}{3}\, x + \frac{d}{x^2}$$

y ayant une limite à gauche et une limite à droite en 0 qui est finie, on en déduit : $c = d = 0$.

Il n'y a donc qu'une unique solution sur $\mathbb{R}$, celle du 2b)

3a) $f(0) = 0$

3 b) : On a :

$$x\, f'(x) = 2\, |f(x)| + x$$

Donc sur $]0, +\infty[$: $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on a donc sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) > f(0) = 0$$

3c) Sur $]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) - \frac{2}{x}\, f(x) = 1$$

Donc il existe une constante c telle que sur $]0, +\infty[$: $f(x) = \ -x + c\, x^2$

Ainsi :

$$f'(0) = -1$$

Donc il existe $\alpha < 0$ tel que sur $]\alpha, 0[$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} < 0$$

Donc :

$$f(x) < 0$$

Donc f est solution sur $]\alpha, 0[$ de l'équation : $x\, y' + 2\, y = x$ et donc sur $]\alpha, 0[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\, x$$

Donc le nombre dérivé à gauche en 0 de f est $\frac{1}{3}$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 4 :</u>

1a)

$$\lim_{t \to 0} h(t) = 1$$

1b) Le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de e^t est :

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

On en déduit :

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}$$

$$h(t) = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}}$$

Soit :

$$0 < h(t) < 1$$

2) L'intégrale a deux bornes impropres.

En $+\infty$:

$$\frac{t\, e^{-t\,x}}{e^t - 1} \sim t\, e^{-(x+1)\,t}$$

Si $x + 1 \geq 0$ l'intégrale diverge.

Si $x + 1 < 0$

$$\lim_{t \to +\infty} t^2\, t\, e^{-(x+1)\,t} = 0$$

D'après la règle de Riemann, l'intégrale converge

En 0 :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t\, e^{-t\,x}}{e^t - 1} = 1$$

La fonction à intégrer est prolongeable par continuité, donc l'intégrale converge.

3) Sur $]0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{t\, e^{-t\,x}}{e^t - 1} \leq e^{-t\,x}$$

Donc :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-t\,x}}{e^t - 1}\, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t\,x}\, dt = \frac{1}{x}$$

On en déduit par comparaison

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

4) Pour $x > 0$:

$$f(x-1)-f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t\left(e^{-t(x-1)}-e^{-t x}\right)}{e^t-1}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t\ e^{-t x}\ (e^t-1)}{e^t-1}\,dt=\int_0^{+\infty}t\ e^{-t x}\,dt=\left[-t\ \frac{e^{-t x}}{x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t x}}{x}\,dt=\frac{1}{x^2}$$

Donc pour tout $k\in[\![1,+\infty[$:

$$f(x+k-1)-f(x+k)=\frac{1}{(x+k)^2}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}f(x+k-1)-f(x+k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$$

Exercice 5

1a) La règle de D'alembert appliqué à ces séries montre qu'elles sont de rayon de convergence 1

1b) sur $]-1,1[$:

$$\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Par dérivation :

$$\sum_{n\geq 1}n\,x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2}n\,(n-1)\,x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

2a) $X(\Omega)=[\![1,+\infty[$

Loi de X :

Définissons les évènements indépendants dans leur ensemble, pour $n\in[\![1,+\infty[$:

$$P_n=\text{"}un\ pile\ est\ obtenu\ au\ lancer\ de\ rang\ n\text{"}$$

Alors, pour $n\in[\![1,+\infty[$:

$$P(X=n)=P(\overline{P_1}\cap\ldots\cap\overline{P_{n-1}}\cap P_n)=(1-p)^{n-1}\,p$$

2b) Espérance de X :

$$E(X)=\sum_{n\geq 1}n\,P(X=n)=\sum_{n\geq 1}n\,(1-p)^{n-1}\,p=\frac{p}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$$

3a) $Y(\Omega)=[\![2,+\infty[$

Loi de Y :

Définissons les évènements, pour $i\in[\![2,+\infty[\,, n\in[\![2,+\infty[\,, i<n$

$$Q_{i,n}=\text{"}un\ pile\ est\ obtenu\ au\ lancer\ de\ rang\ i\ et\ des\ faces\ sont\ obtenues$$

$$\text{à}\ tous\ les\ autres\ lancers\ jusqu'au\ rang\ n-1\text{"}$$

Alors :

$$P\left(Q_{i,n}\right) = (1-p)^{n-2}\,p$$

Pour $n \in [\![2, +\infty[$:

$$P(Y = n) = \sum_{i=1}^{n-1} P\left(Q_{i,n} \cap P_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P\left(Q_{i,n}\right) P(P_n)$$
$$= (n-1)\,(1-p)^{n-2}\,p^2$$

3b) Espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{n\geq 2} n\,P(Y = n) = \sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\,(1-p)^{n-2}\,p^2 = \frac{2\,p^2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}$$

4) soit $n < m$

$$P(X = n\ \cap Y = m) = P\left(Q_{n,m} \cap P_m\right) = P\left(Q_{n,m}\right) P(P_n) = (1-p)^{m-2}\,p^2$$

$$P(X = n) \times P(Y = m) = (1-p)^{n-1}\,p\,(m-1)(1-p)^{m-2}\,p^2 = (m-1)(1-p)^{m+n-3}\,p^3$$

Les deux quantités précédentes n'étant pas égales pour tout $n < m$, les deux variables ne sont pas indépendantes.