Concours <u>EXTERNE</u>
pour l'accès au corps des
INGENIEURS CADRES SUPERIEURS D'ADMINISTRATIONS PARISIENNES (ICSAP)
organisé à partir du 15 mars 2021
pour **3 postes**

2ème épreuve écrite

OPTION : MATHEMATIQUES

Composition de mathématiques.
Coefficient : 3 / Durée : 04h00

Le sujet comprend 5 exercices et 6 pages au total.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

NB : veuillez indiquer l'intitulé de l'épreuve au début de votre copie : MATHEMATIQUES.

⚠ RAPPEL : aucun nom, prénom, signature ou signe distinctif (supérieur hiérarchique, initiales quelles qu'elles soient, numéro de téléphone ou adresse de service, même fictifs, …) ne doivent figurer dans le corps (ou le timbre) de votre composition sous peine d'exclusion du concours.

Remarques importantes :

Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Il n'est pas nécessaire de tous les aborder.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés. Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle. Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3, et on note I_3 la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Etude du cas $a = 1$
Dans toute cette question, on suppose que $a = 1$.
1.a) Expliciter M, puis $M - I_3$.
Calculer $(M - I_3)^2$.
1.b) Déterminer l'unique valeur propre de M.
1.c) M est-elle diagonalisable ?
M est-elle inversible ?

2) Etude du cas $a = 0$.
Dans toute cette question, on suppose que $a = 0$.
2.a) Expliciter M. Déterminer ses valeurs propres.
2.b) Pour chaque valeur propre de M, déterminer une base du sous-espace propre associé.
La matrice M est-elle diagonalisable ?

3) Etude du cas où a est différent de 0 et de 1.
3.a) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
En déduire ses valeurs propres.
3.b) Pour chacune des valeurs propres trouvées, déterminer une base du sous-espace propre associé.
3.c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.
Déterminer une base (u, v, w) dans laquelle la matrice de f est la matrice T définie par :

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1.a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Minorer $\dfrac{1}{t}$, pour t appartenant à $[1, x]$, puis montrer ensuite que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) \geqslant \frac{e^x - e}{x}$$

1.b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Dans la suite, on se propose de trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2.a) Soit g la fonction définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

Calculer $g'(t)$. Déterminer le tableau de variation de g.
2.b) En déduire l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_1^3 g(t)dt \leqslant 2e$$

2.c) Montrer que :

$$\forall x \geqslant 3, \quad 0 \leqslant \int_3^x g(t)\ dt \leqslant \frac{x-3}{x^3} e^x$$

3.a) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ dt$$

3.b) Etablir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t)dt$$

4.a) A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de $f(x)$, valable pour tout réel x appartenant à $[3, +\infty[$.
4.b) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Exercice 3

1) On considère l'équation différentielle :

$$xy' - 2y = x \quad (1)$$

1.a) Résoudre l'équation homogène associée sur $]0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0[$.
1.b) Vérifier qu'il existe une solution particulière de (1) *de la forme :* $y(x) = ax$,
où a *est un réel à déterminer.*
1.c) Déterminer les solutions de (1) *sur* $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = x \quad (2)$$

2.a) Résoudre l'équation homogène associée sur $]0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0[$.
2.b) Vérifier qu'il existe une solution particulière de (2) *de la forme :* $y(x) = bx$,
où b *est un réel à déterminer.*
2.c) Quelles sont les solutions de (2) *sur* $\mathbb{R}$ *?*

3) On considère l'équation différentielle :

$$xy' - 2|y| = x \quad (E)$$

On suppose qu'il existe une solution f *de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.
3.a) Déterminer $f(0)$.
3.b) Montrer que f *est strictement positive sur* $]0, +\infty[$.
On pourra chercher d'abord le signe de f'.
3.c) Montrer que (E) *n'admet aucune solution sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,dt$$

1) On pose :

$$\forall t > 0, h(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

1.a) Déterminer la limite de la fonction h lorsque $t \underset{t>0}{\to} 0$.
1.b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $t \mapsto e^t$.
En déduire que pout tout $t > 0$, $0 < h(t) < 1$.

2) Montrer que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4) Soit $x > 0$. Calculer $f(x-1) - f(x)$.
En déduire l'expression de $f(x)$ à l'aide d'une somme de série.

5) Aurait-on pu trouver le résultat précédent à l'aide du théorème d'intégration terme à terme ?

Exercice 5

1) On considère les séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$$

1.a) Déterminer leur rayon de convergence commun R.
1.b) Calculer leurs sommes sur l'intervalle $]-R,R[$, c'est-à-dire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Dans les questions qui suivent, on considère un jeu de pile ou face.
La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile, et Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième pile.
Par exemple, si les premiers lancers donnent $FFPFP...$, $X = 3$ et $Y = 5$, et si les premiers lancers donnent $PFP...$, $X = 1$ et $Y = 3$.

2.a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Donner la loi de X.
2.b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
Si oui, la calculer.

3.a) Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Donner la loi de Y.
Indication : on pourra commencer par chercher $P(Y = n)$ pour $n \in \{2,3,4\}$, avant de passer au cas général.
3.b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

FIN DE L'ENONCE