MAIRIE DE PARIS

Concours public

pour l'accès au corps des

Ingénieurs des services techniques (F/H) de la Commune de Paris

ouvert à partir du 17 mars 2014

pour 3 postes

Au choix des candidat(e)s, exprimé lors de l'inscription au concours :

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

durée : 4h00
coefficient 3

RAPPEL :

Aucun nom, prénom, signature ou signe distinctif (même fictif): supérieur hiérarchique, initiales quelles qu'elles soient, numéro de téléphone ou adresse du service etc. ne doit figurer dans le corps (ou le timbre) de votre copie sous peine d'exclusion du concours.

N.B :
Le sujet comporte 5 exercices, qui sont indépendants.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Toutefois, pour chaque exercice, il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite de l'exercice, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, de la clarté et de la rigueur des raisonnements, ainsi que de la présentation matérielle.
Les calculatrices sont autorisées, toutefois, tous les calculs formels nécessaires pour obtenir un résultat doivent figurer sur la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat pense avoir repéré une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Soit n un entier naturel, et $E = M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Soit A une matrice appartenant à E.
On considère l'application φ_A définie par :

$$\forall X \in E,\ \varphi_A(X) = AX$$

1) Montrer que φ_A est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

2) Montrer que φ_A est inversible (c'est-à dire : φ_A est un automorphisme de E) si et seulement si la matrice A est inversible.
Donner alors une définition de l'application $(\varphi_A)^{-1}$ analogue à celle de φ_A.

3) On suppose que $n = 2$, et que les matrices A, I_2 et O_2 sont ainsi définies :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(On rappelle que $tr(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$)
Montrer que :

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I_2 = O_2$$

Montrer que l'application φ_A vérifie :

$$\varphi_A^2 - tr(A)\varphi_A + det(A)I = O$$

(en notant I et O l'identité et l'endomorphisme nul de E)

4) On suppose toujours que $n = 2$ et que la matrice A est diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

5) Application : on suppose que la matrice A est ainsi définie :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
b) Déterminer une base $B = (V_1, V_2)$ de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A.
c) En déduire que φ_A est diagonalisable, et donner une base B_1 de $M_2(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de φ_A.

Exercice 2
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\ dt$$

1) Montrer que f est définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2) Montrer que f est de classe C^1 et préciser son sens de variation.

3) Déterminer une fonction g telle que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x+2) = g(x)f(x)$$

4) On considère la fonction h définie par :

$$\forall x > 0, h(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que :

$$\forall x > 0, h(x+1) = h(x)$$

Calculer $h(n)$ pour tout entier n naturel non nul.

5) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers -1.

6) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3
On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in I, xy'' + 3y' - 4x^3y = 0 \qquad (E)$$

où I désigne l'un ou l'autre des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

1) Pour toute solution y de l'équation (E), on définit la fonction z définie par :

$$\forall x \in I, z(x) = x^2y(x)$$

Former l'équation différentielle vérifiée par la fonction z, soit (F).

2) Montrer que si z est une solution de (F) sur $]0, +\infty[$, la fonction z_1 définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, z_1(x) = z(-x)$$

est solution de (F) sur $]-\infty, 0[$.

3) Pour toute fonction z solution de (F) sur $]0, +\infty[$, on définit la fonction Z par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, Z(x) = z(\sqrt{x})$$

Former l'équation différentielle (G) vérifiée par la fonction Z.

4) Résoudre alors les équations différentielles (G), puis (F), puis (E).

5) On considère l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, xy'' + 3y' - 4x^3y = 0 \qquad (E')$$

Déterminer les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et on définit l'application φ ainsi :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

1) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On notera ϕ la forme quadratique associée à φ : $\phi(P) = \varphi(P, P)$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme unique P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(nu) = P_n(\cos u)$$

3) Montrer que pour tout entier naturel n, P_n est de degré n, et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n.

4) Montrer que les polynômes P_n sont deux à deux orthogonaux pour φ, et calculer $\phi(P_n)$ en fonction de l'entier naturel n.

5) On considère l'application g définie par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, g(a,b,c) = \phi(X^3 + aX^2 + bX + c)$$

Montrer que g admet un minimum, atteint pour un triplet unique (a_0, b_0, c_0), déterminer ce triplet, et la valeur de $g(a_0, b_0, c_0)$.

Exercice 5

Le plan affine euclidien usuel est muni d'un repère affine orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Chaque couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est représenté par le point M de coordonnées (x, y) par rapport au repère précédent.

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la courbe C_α définie par :

$$(C_\alpha) = \left\{ (x, y) \in [0, +\infty[^2 \mid x^\alpha + y^\alpha = 1 \right\}$$

1) Montrer que la courbe C_α est symétrique par rapport à une droite que l'on déterminera.

2) On considère deux réels α_1 et α_2, tels que $\alpha_1 < \alpha_2$.
Préciser les positions relatives des deux courbes C_{α_1} et C_{α_2}.

3) Etudier l'existence et la position des tangentes à la courbe C_α aux points $A(0,1)$ et $B(1,0)$.

4) Etudier et tracer la courbe $C_{\frac{1}{2}}$.
Montrer que c'est une portion de conique dont on précisera les caractéristiques.

FIN DE L'ENONCE