Invariants scalaires

Nous allons nous intéresser à la caractérisation analytique de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs, faisant apparaître ainsi deux invariants : le déterminant et le produit scalaire.

CHAPITRE I : La colinéarité

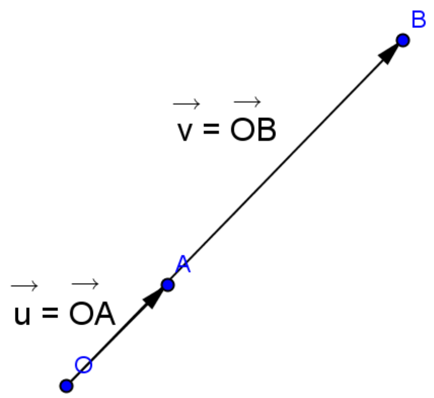
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on dit qu'ils sont colinéaires si en prenant des représentants de même origine, les extrémités des deux vecteurs et leur origine commune sont alignés. On vérifie aisément que cela équivaut à la condition suivante :

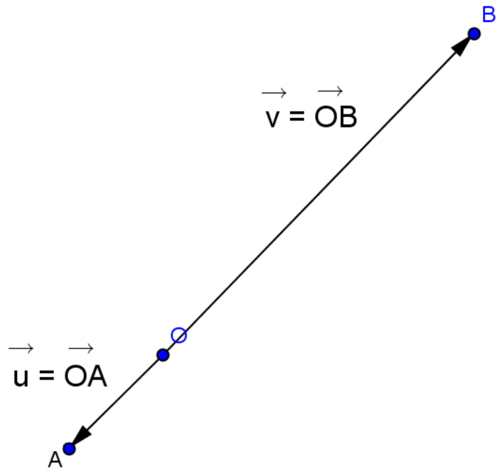
$$\boxed{\exists\, k \in \mathbb{R} : \ \vec{u} = k\ \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\ \vec{u}}$$

Il y a donc trois cas :

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens $(k > 0)$:



2eme cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire $(k < 0)$:



<u>3eme cas : $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul ($k = 0$)</u>

Par la suite nous noterons la situation de colinéarité de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{u} \,//\, \vec{v}}$$

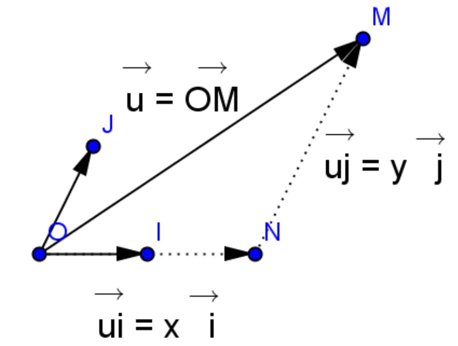
Soient alors $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{u}$ un troisième vecteur. On peut alors décrire de manière unique $\vec{u}$ comme étant la somme de deux vecteurs le premier étant colinéaire à $\vec{\imath}$ et le second colinéaire à $\vec{\jmath}$.

En effet prenons deux représentants de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de même origine et notons la décomposition sous la forme

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}_i + \vec{u}_j \quad \text{avec} \quad \vec{u}_i = x\,\vec{\imath} \ \text{ et } \vec{u}_j = y\,\vec{\jmath}}$$

Posons alors :

$$\boxed{\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}, \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}, \qquad \vec{u} = \overrightarrow{OM}, \qquad \vec{u}_i = \overrightarrow{ON}, \qquad \vec{u}_j = \overrightarrow{NM}}$$



N est alors défini de manière unique comme étant le point d'intersection de la droite (OI) et de la parallèle à la droite (OJ) passant par M.

Le couple de vecteurs $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ est alors qualifié de **<u>base</u>**, ce qui se caractérise ainsi en notant V l'ensemble des vecteurs du plan concerné :

$$\forall\, \vec{u} \in V : \exists\,!\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

Bases directes et bases indirectes

Soit une base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ et deux représentants de cette base de même origine O :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI} \text{ et } \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$$

Soit $\vec{\jmath_1}$ le vecteur $\overrightarrow{OK}$ tel que OK = OI et K ∈ $[O; J]$, c'est-à-dire le vecteur colinéaire à $\vec{\jmath}$ de même sens et de même longueur (norme) que $\vec{\imath}$.

Alors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est qualifiée de base directe si la rotation de centre O qui transforme I en K se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (dit sens trigonométrique) et qualifiée de indirecte dans le cas contraire.

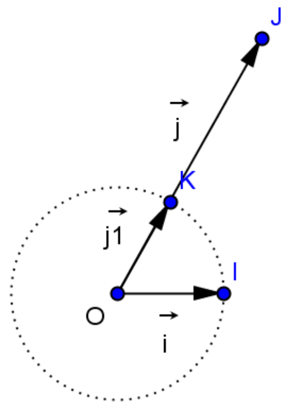


Fig. Base directe

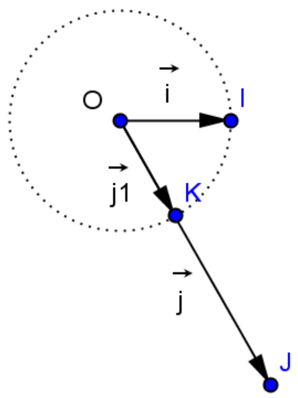


Fig. Base indirecte

Orientation du plan

Nous avons vu qu'il y avait pour la face considérée d'un plan deux familles de bases, les bases directes et les bases indirectes.

Pour une unité choisie, on peut alors définir deux autres familles de bases : les bases orthonormées directes et les bases orthonormées indirectes. L'orientation du plan consiste à considérer une des deux familles comme base de référence, la convention la plus largement acceptée étant d'orienter le plan par les bases directes de la face du plan que l'on observe.

Noter que si le plan est une surface vitrée, une base apparaissant comme directe vue d'une face est indirecte vue de l'autre face.

Orthogonal direct d'un vecteur

Etant donné une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et un vecteur $\vec{u}$, on appelle orthogonal direct de $\vec{u}$ le vecteur que nous noterons $\vec{u}^+$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}^+)$ soit une base orthonormale directe.

Nous avons alors :

$$\boxed{\text{Si } \vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \quad \text{alors } \vec{u}^+ = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}}$$

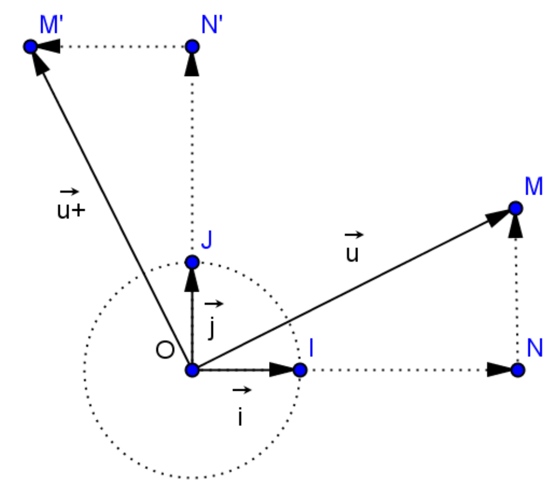
Preuve :

Considérons des représentants de même origine O pour tous les vecteurs

soit :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}\,, \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}\,, \quad \vec{u} = \overrightarrow{OM}\,, \quad \vec{u}^+ = \overrightarrow{OM'}$$

$$x\,\vec{\imath} = \overrightarrow{ON}\,, \quad y\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{NM}$$



La rotation de centre O dans le sens direct et d'angle droit tranforme I en J, M en M' et N en N' de telle sorte que :

$$\overrightarrow{ON'} = x\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N'M'} = y\,(-\,\vec{\imath})$$

Donc :

$$\vec{u}^{+} = \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{N'M'} = x\,\vec{j} + y\,(-\vec{i}) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

Orthogonal indirect d'un vecteur

Etant donné une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ et un vecteur $\vec{u}$, on appelle orthogonal indirect de $\vec{u}$ le vecteur que nous noterons $\vec{u}^{-}$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}^{-})$ soit une base orthonormale indirecte.

Nous avons par conséquent :

$$\boxed{\vec{u}^{-} = -\vec{u}^{+}}$$

Par conséquent si $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base orthonormée indirecte, $(\vec{u}, \vec{u}^{-})$ est une base orthonormée indirecte et on a :

$$\boxed{\text{Si } \vec{u} = x\,\vec{I} + y\,\vec{J} \quad \text{alors } \vec{u}^{-} = -y\,\vec{I} + x\,\vec{J}}$$

Autrement dit quelque soit l'orientation de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$,

Le couple de vecteur $(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\,; -y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$ définit une base orthonormée de même orientation.

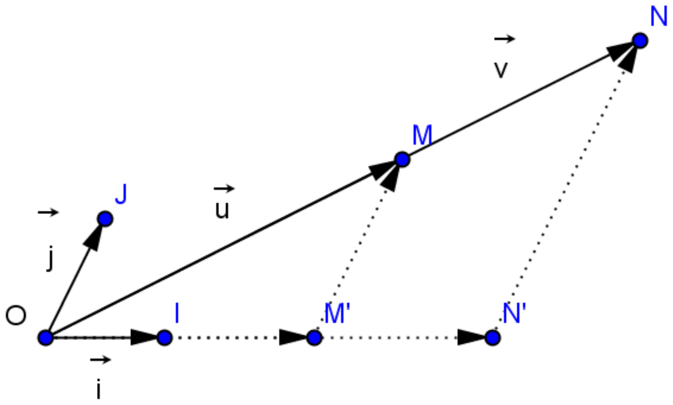
Caractérisation analytique

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement (x, y) et (x', y'). Nous allons chercher une relation sur leurs coordonnées permettant de caractériser leur colinéarité.

Supposons donc dans un premier temps qu'ils soient colinéaires et que leurs coordonnées soient strictement positives. Posons alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM}, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{ON},$$

$$x\,\vec{i} = \overrightarrow{OM'}, \qquad y\,\vec{j} = \overrightarrow{M'M}, \qquad x'\,\vec{i} = \overrightarrow{ON'}, \qquad y'\,\vec{j} = \overrightarrow{N'N}$$



Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{OM'}{ON'} = \frac{MM'}{NN'}$$

Soit en notant a et b les longueurs (normes) de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ respectivement :

$$\frac{a\,x}{a\,x'} = \frac{b\,y}{b\,y'}$$

D'où par simplification puis produit en croix :

$$\boxed{x\,y' = y\,x'}$$

ou encore :

$$\boxed{x\,y' - y\,x' = 0}$$

Nous allons alors émettre la conjecture puis la prouver :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} // \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Longleftrightarrow x\,y' - y\,x' = 0}$$

La preuve se fera en examinant les deux implications.

(=>) <u>Implication directe</u>

On suppose $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} // \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Faisons alors un raisonnement par disjonction de cas :

<u>1^{er} cas : $\exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\,\vec{v}$</u>

Nous avons alors pour les coordonnées le système suivant :

$$\begin{cases} x = k\,x' \\ y = k\,y' \end{cases}$$

Soit en multipliant la première par y' et la seconde par x' :

$$\begin{cases} x\,y' = k\,x'y' \\ y\,x' = k\,x'y' \end{cases}$$

On en déduit ce que l'on voulait montrer :

$$x\,y' = y\,x'$$

<u>2 ème cas : $\exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\ \vec{u}$</u>

Le raisonnement est analogue.

(<=) <u>Implication réciproque</u>

On suppose : $x\,y' = y\,x'$

Là encore raisonnons par disjonction de cas :

<u>1er cas : x' et y' sont non nuls</u> :

Alors :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

Et en notant k ce quotient on a :

$$\begin{cases} x = k\,x' \\ y = k\,y' \end{cases}$$

Donc :

$$\vec{u} = k\ \vec{v}$$

Et donc :

$$\vec{u}\ //\ \vec{v}$$

<u>2eme cas : x' =0</u>

Alors :

$$x\,y' = 0$$

donc là encore deux cas :

<u>1er cas : $x = 0$</u> :

Où il nous faut distinguer deux sous cas :

<u>Sous cas : $y = 0$</u> :

$$\vec{u} = \vec{0} = 0\ \ \vec{v}$$

Donc :

$$\vec{u}\ //\ \vec{v}$$

<u>Sous cas : $y \neq 0$</u> :

$$\vec{u} = y\ \vec{j} \text{ et } \vec{v} = y'\,\vec{j}$$

Donc :

$$\vec{u} = \frac{y}{y'}\,\vec{v}$$

Et donc :

$$\vec{u}\ //\ \vec{v}$$

<u>2eme cas : $y' = 0$</u> :

Il se traite de manière analogue au 1er cas où $x = 0$.

Nous avons donc montré la colinéarité dans tous les cas de figure.

Déterminant de deux vecteurs du plan

Nous allons nous intéresser à la signification géométrique de la quantité

$x\,y' - y\,x'$ pour deux vecteurs quelconques non nécessairement colinéaires en commençant par montrer que c'est un invariant dans les bases orthonormées de même orientation.

Soit donc deux bases orthonormées de même orientation $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(\vec{I}, \vec{J})$. Décrivons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leurs coordonnées dans ces bases à savoir :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{i}, \vec{j})$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{I}, \vec{J})$$

Posons également :

$$\vec{I} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$$

Et donc :

$$\vec{J} = -b\,\vec{i} + a\,\vec{j}$$

Puisque $\|\vec{I}\| = 1$ nous avons donc :

$$a^2 + b^2 = 1$$

Nous avons alors :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} = X\,(a\,\vec{i} + b\,\vec{j}) + Y\,(-b\,\vec{i} + a\,\vec{j})$$

D'où on déduit les relations de changement de base pour $\vec{u}$:

$$\begin{cases} x = a\,X - b\,Y \\ y = b\,X + a\,Y \end{cases}$$

Et de manière analogue pour $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x' = a\,X' - b\,Y' \\ y' = b\,X' + a\,Y' \end{cases}$$

On en déduit :

$$x\,y' - y\,x' = (a\,X - b\,Y)\,(b\,X' + a\,Y') - (b\,X + a\,Y)(a\,X' - b\,Y')$$

$$= (a^2 + b^2)\,(X\,Y' - Y\,X')$$

$$= X\,Y' - Y\,X'$$

Cette quantité est donc bien invariante par changement de base orthonormée de même orientation.

Considérons alors une base orthonormée formée sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tous deux supposés non nuls , comme suit :

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$$

$\vec{J}$ l'unique vecteur tel que $(\vec{I}, \vec{J})$ soit une base orthonormée de même orientation que la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a alors dans cette base :

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{I} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} \text{ avec } X = \|\vec{u}\| \text{ et } Y = 0$$

$$\vec{v} = X'\,\vec{I} + Y'\vec{J}$$

Ainsi :

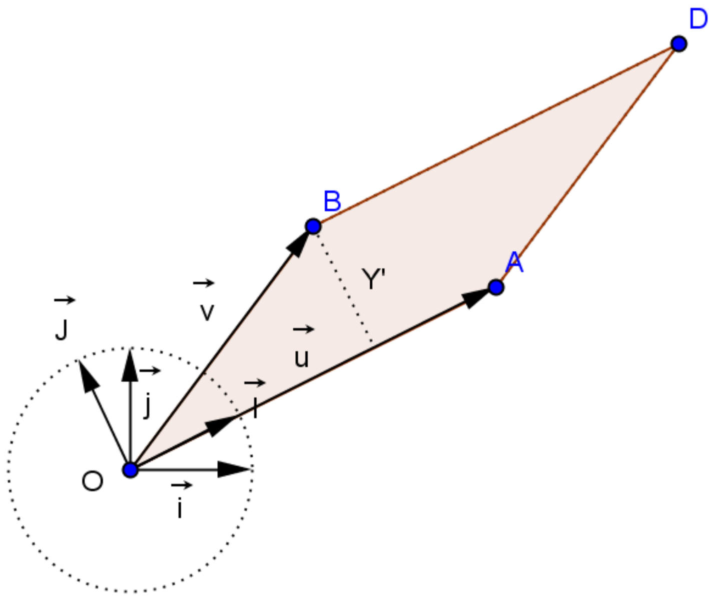
$$X\,Y' - Y\,X' = \|\vec{u}\|\,Y'$$

Considérons alors un parallélogramme O B D A tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{OB}$$

Et distinguons deux cas

<u>1er cas : $Y' > 0$</u> :



On a alors :

$\|\vec{u}\|$ est la base OA du parallélogramme et Y' sa hauteur

La quantité X Y' – Y X' représente donc l'aire du parallélogramme O B D A

2^er^ cas : Y' < 0 :

La quantité X Y' – Y X' représente l'opposé de l'aire du parallélogramme O B D A

En résumé :

L'invariant scalaire x y' – y x' représente l'aire d'un parallélogramme formé sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si l'orientation du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est celle de la base orthonormée de référence $(\vec{i}, \vec{j})$ et l'opposé de cette aire si l'orientation du couple est inverse.

Examinons alors ce que représente cette quantité dans une base quelconque $(\vec{i}, \vec{j})$ non nécessairement orthonormée.

Formons une base orthonormée $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ sur $(\vec{i}, \vec{j})$ comme précédemment sur $(\vec{u}, \vec{v})$, on a alors :

$$\vec{i} = a\,\vec{i_1} \quad \text{avec } a > 0$$

$$\vec{j} = b\,\vec{i_1} + c\,\vec{j_1}$$

En prenant $c > 0$ la base orthonormée $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ est alors de même orientation que la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On a alors :

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = x\,a\,\vec{i_1} + y\,(b\,\vec{i_1} + c\,\vec{j_1})$

Posons alors :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{i_1}, \vec{j_1})$$

La relation précédente donne les relations de changement de base

pour $\vec{u}$:

$$\begin{cases} X = a\,x + b\,y \\ Y = c\,y \end{cases}$$

et pour $\vec{v}$:

$$\begin{cases} X' = a\,x' + b\,y' \\ \quad Y' = c\,y' \end{cases}$$

On en déduit :

$$X\,Y' - Y\,X' = (a\,x + b\,y)\,c\,y' - c\,y\,(\,a\,x' + b\,y')$$

$$= a\,c\,(\,x\,y' - y\,x')$$

D'où :

$$\boxed{x\,y' - \,y\,x' = \frac{X\,Y' - \,Y\,X'}{a\,c}}$$

Interprétons alors les différents facteurs :

X Y' – Y X' est l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u},\vec{v})$ si ce couple de vecteurs est de même orientation que $(\,\vec{\imath_1}\,,\vec{\jmath_1})$ donc $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ et l'opposé de cette aire dans le cas contraire.

Le produit ac est l'aire du parallélogramme formé sur $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

<u>En résumé</u> :

Si on a pour deux vecteurs non colinéaires :

$$\vec{u}\,\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{et}\,\vec{v}\,\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{dans une base } (\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$$

Alors :

Si $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ est une base orthonormée, la quantité x y' – y x' a la même valeur dans toutes les bases orthonormée de même orientation et est strictement positive si $(\vec{u},\vec{v})$ a la même orientation que $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, elle représente alors l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u},\vec{v})$ exprimée dans l'unité de la base orthonormée.

si $(\vec{u},\vec{v})$ a l'orientation inverse de $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, la quantité x y' – y x' est strictement négative et représente l'opposé de l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u},\vec{v})$.

Si $(\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ est une base quelconque, la quantité x y' – y x' représente le quotient de l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u},\vec{v})$ par l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $(\vec{u}, \vec{v})$ a la même orientation que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et son opposé dans le, cas contraire.

Si les deux vecteurs sont colinéaires la quantité x y' – y x' est nulle dans toutes les bases.

La quantité x y' – y x' est appelée déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On la note :

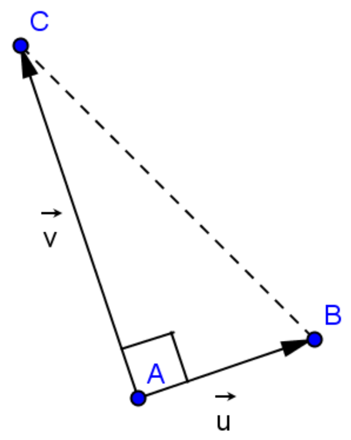
$$\boxed{\mathrm{Det}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\,y' - y\,x'}$$

CHAPITRE II : L'orthogonalité

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on dit qu'il sont orthogonaux si en prenant des représentants de même origine respectivement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, le triangle A B C ainsi formé est rectangle en A. Cela équivaut donc à la condition de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



Cela amène naturellement à s'intéresser à caractériser la longueur d'un vecteur appelée norme à l'aide de ses coordonnées dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

L'emploi du théorème de Pythagore nécessitera alors de travailler dans une base orthonormée.

Norme d'un vecteur

Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$, la longueur AB exprimée dans l'unité de la base orthonormée.

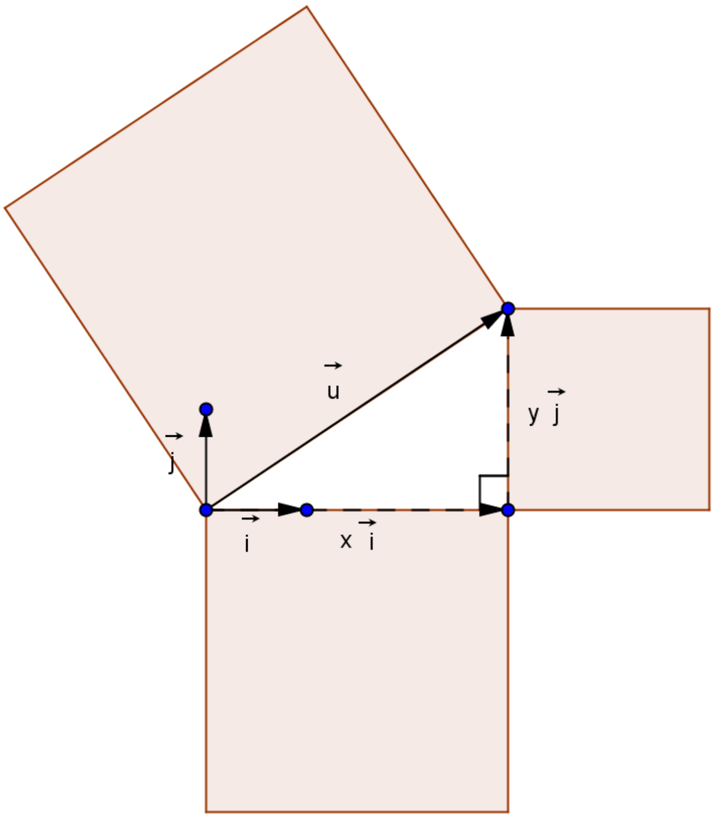
On la note : $\|\vec{u}\|$

Décomposons $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à l'aide de ses coordonnées :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{i}\|^2 + \|y\vec{j}\|^2$$



Soit :

$$\boxed{\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Caractérisation analytique

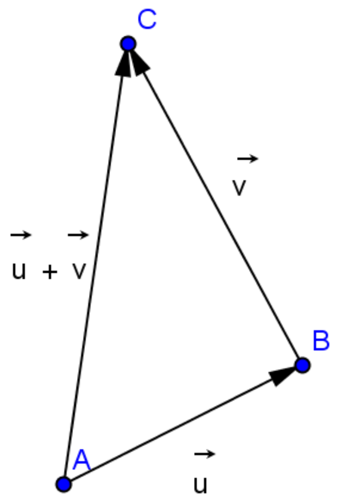
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont respectivement (x, y) et (x', y'). Nous allons chercher une relation sur leurs coordonnées permettant de caractériser leur orthogonalité.

Posons :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$

La condition d'orthogonalité est que le triangle A, B, C soit rectangle en B, ce qui se traduit par :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



Soit encore :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

D'où :

$$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0}$$

Cette quantité ne dépend que de l'unité choisie et est donc un invariant dans toutes les bases orthonormées (c'est-à-dire de même unité).

Exprimons là à l'aide des coordonnées en posant :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}, \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} \text{dans la base orthonormée}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)$

Soit après développement et simplification :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\,(x\,x' + y\,y')$$

Il apparaît alors plus intéressant de considérer la quantité :

$$\boxed{p(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = x\,x' + y\,y'}$$

Nous avons alors un invariant scalaire (quantité qui est là même dans toutes les bases orthonormées) et dont l'annulation caractérise l'orthogonalité de deux vecteurs.

Il reste alors à lui trouver un nom et pour cela examinons ses propriétés.

La première propriété est celle pour laquelle nous l'avons construit :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff p(\vec{u},\vec{v}) = 0}$$

Dans toute la suite nous poserons :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

Et k sera un réel quelconque.

<u>Commutativité</u> :

$$\boxed{p(\vec{u},\vec{v}) = p(\vec{v},\vec{u})}$$

preuve : il suffit de constater :

$$x\,x' + y\,y' = x'\,x + y'\,y$$

Distributivité à gauche :

$$\boxed{p(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = p(\vec{u},\vec{w}) + p(\vec{v},\vec{w})}$$

preuve :

$$(x+x')\,x'' + (y+y')\,y'' = (x\,x'' + y\,y'') + (x'\,x'' + y'\,y'')$$

Distributivité à droite :

$$\boxed{p(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = p(\vec{u},\vec{v}) + p(\vec{u},\vec{w})}$$

preuve : analogue à précédente

Associativité :

$$\boxed{p(k\,\vec{u},\vec{v}) = k\,p(\vec{u},\vec{v}) \quad (\text{donc par commutativité} = p(\vec{u},k\,\vec{v})\ )}$$

$$(k\,x)\,x' + (k\,y)\,y' = k\,(\,x\,x' + y\,y')$$

Toutes ces propriétés sont des propriétés caractéristiques du produit des nombres réels.

Pour cela on convient de qualifier $p(\vec{u},\vec{v})$ de produit scalaire et on adopte l'écriture :

$$\boxed{p(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{v}}$$

Examinons alors d'autres propriétés conséquences directes de ces dernières :

$$\boxed{p(\vec{u},\vec{u}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

Preuve :

$$x\,x + y\,y = x^2 + y^2$$

On note ainsi :

$$\boxed{\vec{u}^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

Il en résulte les trois développements remarquables :

$$\boxed{(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2}$$

Preuve :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} + \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}\,.\,\vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$

$$\boxed{(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2}$$

Preuve :

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} - \vec{u}\,.\vec{v} - \vec{v}\,.\vec{u} + \vec{v}\,.\vec{v} = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}^2$

$$\boxed{(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2}$$

Preuve :

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} - \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}\,.\vec{u} - \vec{v}\,.\vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

<u>Propriété de projection</u> :

Il s’agit là de la propriété la plus importante du produit scalaire, aux conséquences nombreuses dans toutes les applications des mathématiques.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Décomposons le vecteur $\vec{v}$ selon une somme d’un vecteur $\vec{v}^{\parallel}$ colinéaire à $\vec{u}$ et d’un vecteur $\vec{v}^{\perp}$ orthogonal à $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}^{\parallel} + \vec{v}^{\perp}}$$

Alors nous avons par distributivité :

$$\boxed{\vec{u}\,.\vec{v} = \vec{u}\,.\vec{v}^{\parallel}}$$

Une autre expression de cette propriété est

Si $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors par produit scalaire avec les vecteurs de base on a :

$$\boxed{\begin{cases} x = \vec{u}\,.\vec{\imath} \\ y = \vec{u}\,.\vec{\jmath} \end{cases}}$$

Autrement dit, les coordonnées d’un vecteur dans une base orthonormée sont les produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de base. Ce point est d’une grande portée philosophique dans l’utilisation des mathématiques pour la modélisation, car il signifie que pour connaître un vecteur, il suffit de connaître ses coordonnées dans une base orthonormée. Par un choix judicieux de cette base, on peut ainsi aboutir à des concepts très fructueux comme la transformée de Fourier, la transformée de Laplace, les méthodes par éléments finis , ...

Considérons alors une base orthonormée formée sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tous deux supposés non nuls , comme suit :

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$$

$\vec{J}$ est un vecteur tel que $(\vec{I},\vec{J})$ soit une base orthonormée définissant l'orientation du plan.

Soit α la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ pour cette orientation et soit $\vec{K}$

Le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens à savoir :

$$\vec{K} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} = \cos(\alpha)\,\vec{I} + \sin(\alpha)\,\vec{J}$$

Alors on a :

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{I}$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\,(\,\cos(\alpha)\,\vec{I} + \sin(\alpha)\,\vec{J}\,)$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\,\alpha)}$$

Cette formule permet ainsi de calculer la valeur absolue de l'angle formé par deux vecteurs.