Intégrales impropres

I Fonction localement intégrable sur un intervalle

On dit qu'une fonction f est localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné $[a;b]$ inclus dans I.

Exemple **:**

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

alors f est localement intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}^*$.

Considérons alors pour $x \in]0;1]$:

$$g(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

g admettant une limite en 0 par valeur supérieure, on conviendra de noter :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

et on qualifiera cette intégrale d'impropre.

Il faudra prendre garde à ne pas se faire abuser par la notation car la fonction f n'est pas définie en 0 et, quand bien même on lui donnerait une valeur arbitraire en 0, elle ne serait pas bornée sur $[0;1]$ donc non intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$

Considérons alors pour $x \in [1;+\infty[$:

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$$

g admettant une limite infinie en $+\infty$, on conviendra de noter :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = +\infty$$

Et on dira que l'intégrale impropre diverge.

II Intégrales impropres

1) Intégrales impropres en $+\infty$ et en $-\infty$

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a; +\infty[$, on définit la fonction g sur $[a; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Si g admet une limite finie en $+\infty$ on dit que l'intégrale impropre est convergente en $+\infty$ et on écrit :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

Dans ce cas, pour tout réel c de $[a; +\infty[$ la fonction :

$$h(x) = \int_c^x f(t) dt$$

admet également une limite finie en $+\infty$

Une définition analogue se fait pour une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $]-\infty; a]$ avec, dans le cas de convergence en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{x \to +\infty} \int_x^a f(t)\, dt$$

Si f est une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un réel a tel que l'intégrale soit convergente en $+\infty$ et en $-\infty$, alors on écrit :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt}$$

Cette quantité est indépendante du réel a. Plus généralement, on peut écrire la relation de Chasles pour tous réels a et b

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{+\infty} f(t)dt}$$

<u>Preuve :</u>

$$h(x) = \int_{c}^{x} f(t)dt = \int_{c}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{c}^{a} f(t)dt + g(x)$$

si g admet une limite finie en $+\infty$ alors h admet une limite finie en $+\infty$

Posons :

$$k(x) = \int_{-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt$$

La relation de Chasles pour un réel c quelconque donne :

$$k(x) = \int_{-x}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{x} f(t)dt$$

par passage à la limite en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt$$

De même

$$k(x) = \int_{-x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{b} f(t)dt \int_{b}^{x} f(t)dt$$

Le passage à la limite donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{+\infty} f(t)dt$$

2) Intégrale impropre en une borne finie

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;b[$, on définit la fonction g sur $[a;+\infty[$ par :

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

Si g admet une limite finie quand x tend vers b par valeur inférieure, on dit que l'intégrale impropre est convergente en b et on écrit :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Une définition analogue se fait pour une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $]a;b]$ et conduit en cas de convergence à l'écriture :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_{x}^{b} f(t)\, dt$$

3) Intégrale impropre en deux bornes

Des définitions et des propriétés analogues peuvent être formulées si f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $]a;b[$, a et b pouvant éventuellement être, l'une ou l'autre, des bornes infinies, et conduisent, en cas de convergence, à écrire pour un réel quelconque c de $]a;b[$:

Si a et b réels :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_{x}^{c} f(t)\, dt + \lim_{x\to b^-} \int_{c}^{x} f(t)\, dt$$

Si a réel et $b = +\infty$:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x \to +\infty} \int_c^x f(t)\,dt$$

Si $a = -\infty$ et b réel :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t)\,dt$$

La relation de Chasles reste valable dans toutes les situations :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt$$

III Intégrales impropres de référence

Une classe importante de fonctions conduit, par primitive, à l'analyse directe de la convergence de l'intégrale impropre associée. Ces fonctions vont d'ailleurs jouer un rôle dans le critère de convergence donné par les règles de Riemann.

Soit donc une fonction, pour α réel quelconque, de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

f est localement intégrable sur $]0; +\infty[$ et les fonctions intégrales associées sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$ sont respectivement :

$$F_1(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad , \quad F_2(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Or une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est :

Si $\alpha = 1$:

$$F(t) = Ln(t)$$

Si $\alpha \neq 1$:

$$F(t) = \frac{1}{1-\alpha}\, t^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

Donc :

Si $\boldsymbol{\alpha = 1}$:

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $]\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ est divergente et :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{dt} = +\infty$$

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $[\mathbf{1}; +\infty[$ est divergente et :

$$\int_{\mathbf{1}}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{dt} = +\infty$$

Si $\boldsymbol{\alpha} > 1$:

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $]\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ et est divergente et :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^{\alpha}}} \boldsymbol{dt} = +\infty$$

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $[\mathbf{1}; +\infty[$ est convergente et :

$$\int_{\mathbf{1}}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^{\alpha}}} \boldsymbol{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha - 1}}$$

Si $\boldsymbol{\alpha} < 1$:

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $]\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ et est convergente et :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^{\alpha}}} \boldsymbol{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1 - \alpha}}$$

l'intégrale impropre de $\boldsymbol{f}$ sur $[\mathbf{1}; +\infty[$ est divergente et :

$$\int_{\mathbf{1}}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^{\alpha}}} \boldsymbol{dt} = +\infty$$

A retenir que la convergence ne s'obtient en $+\infty$ que pour $\alpha > 1$ et en 0 que pour $\alpha < 1$

Une autre classe de fonctions conduit à une intégration par primitive. Il s'agit, pour β réel quelconque, des fonctions du type :

$$f(x) = \frac{1}{x\, Ln^{\beta}(x)}$$

f est localement intégrable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et les fonctions intégrales associées sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ sont respectivement :

$$F_1(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t\, Ln^{\beta}(t)} dt \quad , \quad F_2(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t\, Ln^{\beta}(t)} dt$$

A noter que les intégrales comportent deux bornes « impropres »

Or une primitive de f sur $]0;1[\, \cup\,]1;+\infty[$ est :

Si $\beta = 1$:

$$F(t) = Ln(Ln(t))$$

L'intégrale impropre est alors divergente en ses quatre bornes

Si $\beta \neq 1$:

$$F(t) = \frac{1}{1-\beta}\, Ln^{1-\beta}(t) = \frac{1}{1-\beta} \times \frac{1}{Ln^{\beta-1}(t)}$$

Si $\beta > 1$:

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\beta} \times \frac{1}{Ln^{\beta-1}(t)} = 0$$

$$\lim_{t\to0^+} |F(t)| = \lim_{t\to1^-} |F(t)| = \lim_{t\to1^+} |F(t)| = +\infty$$

donc l'intégrale impropre est convergente en $+\infty$ et divergente en ses trois autres bornes $0^+, 1^-, 1^+$

Si $\beta < 1$:

$$\lim_{t\to+\infty} |F(t)| = \lim_{t\to0^+} |F(t)| = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{1-\beta}\, Ln^{1-\beta}(t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to1^-} F(t) = \lim_{t\to1^+} F(t) = 0$$

L'intégrale impropre est divergente en $+\infty$ et en 0^+et convergente en ses deux autres bornes $1^-, 1^+$

IV Critères de convergence pour les intégrales impropres

Dans toute la suite, les critères vont être présentés uniquement en $+\infty$ mais pourront être transposés à une autre borne $-\infty$ ou une borne finie inférieure ou supérieure.

1) Critère de Cauchy en $+\infty$

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;+\infty[$ et la fonction intégrale associée F sur $[a;+\infty[$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

alors F converge en $+\infty$ si et seulement si F vérifie le critère de Cauchy, ce qui se traduit par :

$$\forall\, \varepsilon \in\,]0;+\infty[\ \ \exists\, x_0 \in [a;+\infty[\ :\ \forall\,(x,h) \in \mathbb{R} \times\,]0;+\infty[\ :\ x > x_0 \Rightarrow \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

2) Absolu convergence

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;+\infty[$ et F la fonction intégrale associée, AF celle associée à sa valeur absolue sur $[a;+\infty[$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$AF(x) = \int_a^x |f(t)|\, dt$$

Si AF admet une limite finie en $+\infty$ alors, F admet une limite finie en $+\infty$. On dit alors que l'intégrale impropre de f sur $[a;+\infty[$ est absolument convergente. La réciproque est fausse.

Preuve :

Il suffit de montrer que F vérifie le critère de Cauchy pour la convergence en $+\infty$, ce qui est évident compte tenu de la relation pour $h > 0$

$$\left|\int_{x}^{x+h} f(t)dt\right| \leq \int_{x}^{x+h} |f(t)|dt$$

3) Critère de Comparaison pour les fonctions positives

Soit f et g deux fonctions localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;+\infty[$ et leurs fonctions intégrales associées respectives F et G sur $[a;+\infty[$:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \qquad G(x) = \int_{a}^{x} g(t)dt}$$

Si G converge en $+\infty$ et si :

$$\forall\, \boldsymbol{x \in [a;+\infty[\quad f(x) \geq 0 \quad f(x) \leq g(x)}$$

alors F admet une limite finie en $+\infty$ et :

$$\boldsymbol{\int_{a}^{+\infty} f(t)dt \leq \int_{a}^{+\infty} g(t)dt}$$

Preuve :

Il suffit de noter que F et G sont croissantes. Si G converge en $+\infty$, elle est majorée sur $[a;+\infty[$ et donc par comparaison intégrale, F l'est aussi, donc converge en $+\infty$. Or :

$$\int_{a}^{x} f(t)dt \leq \int_{a}^{x} g(t)dt$$

Par passage à la limite on en déduit :

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt \leq \int_{a}^{+\infty} g(t)dt$$

4) Critère de convergence dominée

Soient f et g deux fonctions localement intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $[a;+\infty[$ et leurs fonctions intégrales associées respectives F et G sur $[a;+\infty[$:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad G(x)=\int_a^x g(t)dt$$

Si G converge en $+\infty$ et s'il existe un réel $M>0$ tel que :

$$\forall\, x\in[a;+\infty[\quad f(x)\geq 0\quad f(x)\leq M\,g(x)$$

alors F admet une limite finie en $+\infty$

Preuve :

C'est le critère précédent en remplaçant g par $M\ g$ dont l'intégrale converge en $+\infty$

5) Critère d'équivalence

Soient f et g deux fonctions localement intégrables au sens de Riemann, et positives ou nulles sur un intervalle $[a;+\infty[$, et leurs fonctions intégrales associées respectives F et G sur $[a;+\infty[$:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad G(x)=\int_a^x g(t)dt$$

Si on a en $+\infty$:

$$f(x)\sim g(x)$$

alors :

$$F \text{ converge en } +\infty \iff G \text{ converge en } +\infty$$

$$F \text{ tend vers } +\infty \text{ en } +\infty \iff G \text{ tend vers } +\infty \text{ en } +\infty$$

On dit que les intégrales impropres de f et g sont de même nature sur $[a;+\infty[$

Preuve :

L'équivalence de F et de G en $+\infty$ entraine qu'il existe deux réels strictement positifs M et M' tels que :

$$\forall\, x \in [a;+\infty[\ \ f(x) \leq M\ g(x)\ \text{ et }\ g(x) \leq M'\, f(x)$$

Le critère précédent fournit alors les résultats.

6) Règles de Riemann en $+\infty$

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann et positive ou nulle sur un intervalle $[a;+\infty[$, et sa fonction intégrale associée F sur $[a;+\infty[$:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$$

Si il existe un réel $\alpha > 1$ et un réel L tel que :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = L}$$

Alors F converge en $+\infty$

Preuve :

1er cas : $L = 0$

Alors il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [a;+\infty[\ \ |f(x)| \leq M\ \times \frac{1}{x^{\alpha}}$$

Le critère de convergence dominée s'applique car l'intégrale impropre de la fonction majorante est convergente sur $[1;+\infty[$. L'intégrale impropre de f est alors absolument convergente sur $[a;+\infty[$

2ème cas : $L > 0$

Alors en $+\infty$:

$$f(x) \sim \frac{L}{x^{\alpha}}$$

Le critère d'équivalence s'applique

Si il existe un réel $\alpha \leq 1$ et un réel $L \neq 0$ tel que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = L$$

Alors F diverge en $+\infty$

<u>Preuve</u> :

$$f(x) \sim \frac{L}{x^{\alpha}}$$

Le critère d'équivalence s'applique.

7) <u>Règles de Riemann en 0</u>

Soit f une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $]0; b]$ où $b > 0$ et sa fonction intégrale associée F sur $]0; b]$ (un cas analogue se faisant sur $[b; 0[$ $b < 0)$:

$$F(x) = \int_{x}^{b} f(t)dt$$

Si il existe un réel $\alpha > 1$ et un réel $L \neq 0$ tel que :

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} f(x) = L$$

Alors F diverge en 0

<u>Preuve</u> :

$$f(x) \sim \frac{L}{x^{\alpha}}$$

Le critère d'équivalence s'applique.

Si il existe un réel $\alpha < 1$ et un réel L tel que :

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} f(x) = L$$

Alors F converge en 0

Preuve :

1er cas : $L = 0$

alors il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \left]0; b\right] \quad |f(x)| \leq M \times \frac{1}{x^{\alpha}}$$

Le critère de convergence dominée s'applique car l'intégrale impropre de la fonction majorante est convergente sur $]0; b]$. L'intégrale impropre de f est alors absolument convergente sur $]0; b]$

2ème cas : $L > 0$

Alors en 0 :

$$f(x) \sim \frac{L}{x^{\alpha}}$$

Le critère d'équivalence s'applique

8) Règles de Riemann en une borne finie

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ où $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} > 0$ et sa fonction intégrale associée $\boldsymbol{F}$ sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ (un cas analogue se faisant sur $[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}[$ $\boldsymbol{b} < 0)$:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{x}^{b} f(t)dt}$$

Si il existe un réel $\boldsymbol{\alpha} > 1$ et un réel $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{0}$ tel que :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^{+}} (x-a)^{\alpha} f(x) = L}$$

Alors $\boldsymbol{F}$ diverge en $\boldsymbol{a}$

Si il existe un réel $\alpha < 1$ et un réel L tel que :

$$\lim_{x \to a^+} (x - a)^\alpha f(x) = L$$

Alors F converge en a

Preuves :

Totalement analogues au cas précédent où $a = 0$

9) Application des règles de Riemann aux intégrales de Bertrand

Considérons, pour α et β réels quelconques, la classe des fonctions du type :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \, Ln^\beta(x)}$$

f est localement intégrable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et les fonctions intégrales associées sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ sont respectivement :

$$F_1(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t^\alpha \, Ln^\beta(t)} dt \quad , \quad F_2(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t^\alpha \, Ln^\beta(t)} dt$$

Nous avons déjà étudié, dans le cas $\alpha = 1$, la convergence de ces intégrales aux quatre bornes $+\infty$, 0^+, 1^-, 1^+. Les règles de Riemann vont donner les autres cas.

En effet, en 1 nous avons :

$$Ln(x) \sim (x - 1)$$

donc

$$Ln^\beta(x) \sim (x - 1)^\beta$$

d'où :

$$f(x) \sim \frac{1}{(x - 1)^\beta}$$

Et l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$

Pour les deux autres bornes, distinguons deux cas :

1^er^ cas $\alpha > 1$:

En prenant :

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{2} > 1$$

On a $\alpha - \gamma > 0$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\gamma} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ln^{-\beta}(x)}{x^{\alpha-\gamma}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\gamma} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} Ln^{\beta}(x)} = +\infty \ (ou - \infty \text{ selon parité de } \beta)$$

Donc l'intégrale impropre est convergente en $+\infty$ et divergente en 0^+

2^ème^ cas : $\alpha < 1$

En prenant :

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{2} < 1$$

On a $\gamma - \alpha > 0$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\gamma} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{Ln^{\beta}(x)} = +\infty$$

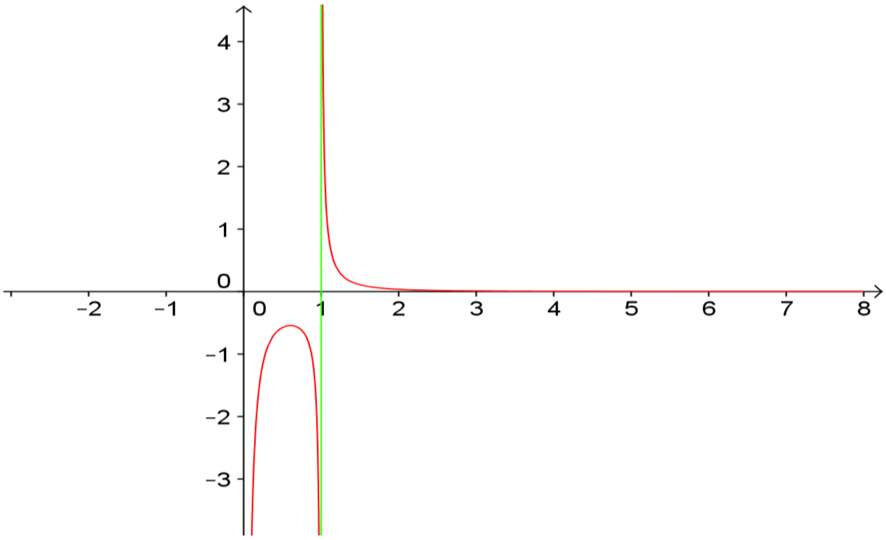
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\gamma} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\gamma-\alpha} Ln^{-\beta}(x) = 0$$

donc l'intégrale impropre est divergente en $+\infty$ et convergente en 0^+

Ci-dessous, deux graphiques illustrant ces résultats :

Le premier concerne la fonction :

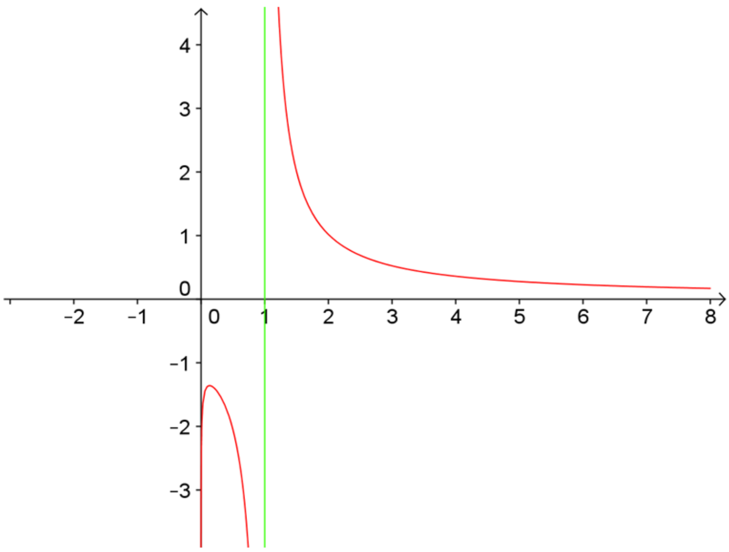
$$f(x) = \frac{0,1}{x^2\ Ln(x)}$$



On note que la convergence des intégrales impropres en $+\infty$ en en 1 se traduit graphiquement par le fait que la courbe se confond « assez vite » avec ses asymptotes en ces bornes (même s'il faut se méfier de ce que l'on voit, nos sens étant imparfaits, alors que les mathématiques le sont), alors qu'en 0, la courbe peine à se rapprocher de son asymptote verticale.

Le second exemple concerne la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ Ln(x)}$$



Ici, l’intégrale converge en 0 et la courbe se confond tellement avec son asymptote verticale en 0 qu’on a l’impression que la fonction tend vers une limite finie en 0, ce qui n’est pas le cas, puisqu’elle tend vers $-\infty$

L’intégrale diverge en 1 et cela se traduit bien sur le graphique par le fait que la courbe peine à se rapprocher de son asymptote verticale. Il en est de même en $+\infty$, la courbe peinant à se rapprocher de son asymptote horizontale.