Intégrale de Riemann

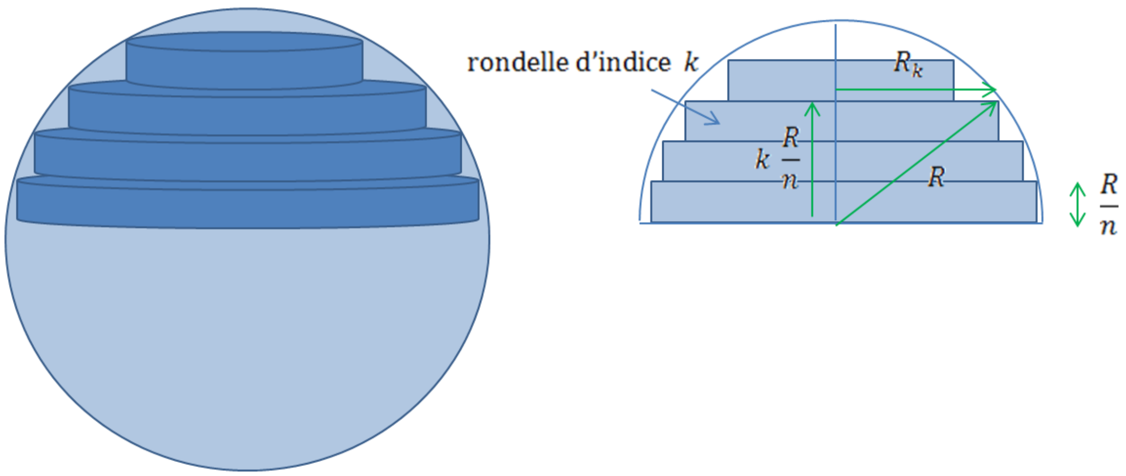
I Approche

1) Un premier exemple :

Posons nous le problème d'évaluer le volume d'une demi-boule de rayon R. Une méthode intuitive consiste à découper le rayon de cette demi-boule en n parties égales et de la remplir avec $(n-1)$« rondelles » (des cylindres de révolution en fait) avec dans l'idée qu'en prenant n suffisamment grand, le volume formé par l'ensemble des rondelles soit très proche de celui de la demi-boule.

Evaluons donc le volume V_n des $(n-1)$ rondelles, en commençant par celui v_k de la rondelle d'indice k de rayon R_k et d'épaisseur h avec :

$$h = \frac{R}{n}$$



Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$${R_k}^2 + \left(k\,\frac{R}{n}\right)^2 = R^2$$

Soit :

$${R_k}^2 = R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

Ainsi :

$$v_k = \pi \ {R_k}^2 \ h = \pi \ R^2 \ \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{R}{n} = \frac{\pi \ R^3}{n} \ \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

D'où :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{\pi \ R^3}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{\pi \ R^3}{n} \left((n-1) - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right)$$

$$V_n = \pi \ R^3 \ \left(\frac{(n-1)}{n} - \frac{1}{n^3} \ \frac{(n-1)n\,(2\,n-1)}{6}\right)$$

$$V_n = \pi \ R^3 \ \left(1 - \frac{1}{n} - \ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ \left(2 \ - \frac{1}{n}\right)}{6}\right)$$

Nous observons comme attendu intuitivement, que la suite des volumes V_n tend vers une valeur limite, qui est :

$$V = \pi \ R^3 \ \left(1 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2}{3} \ \ \pi \ R^3$$

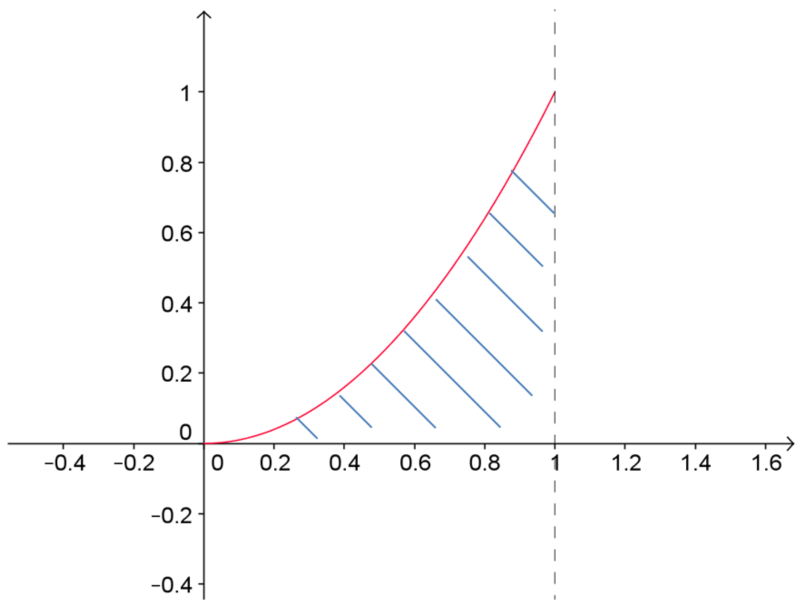
D'où le volume d'une boule de rayon R :

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \ \ \pi \ R^3}}$$

Nous venons d'accomplir un calcul intégral, c'est-à-dire qui intègre une somme d'éléments infinitésimaux de référence, dont on sait évaluer le volume, ici des rondelles, mais ces éléments pourront être de bien des natures.

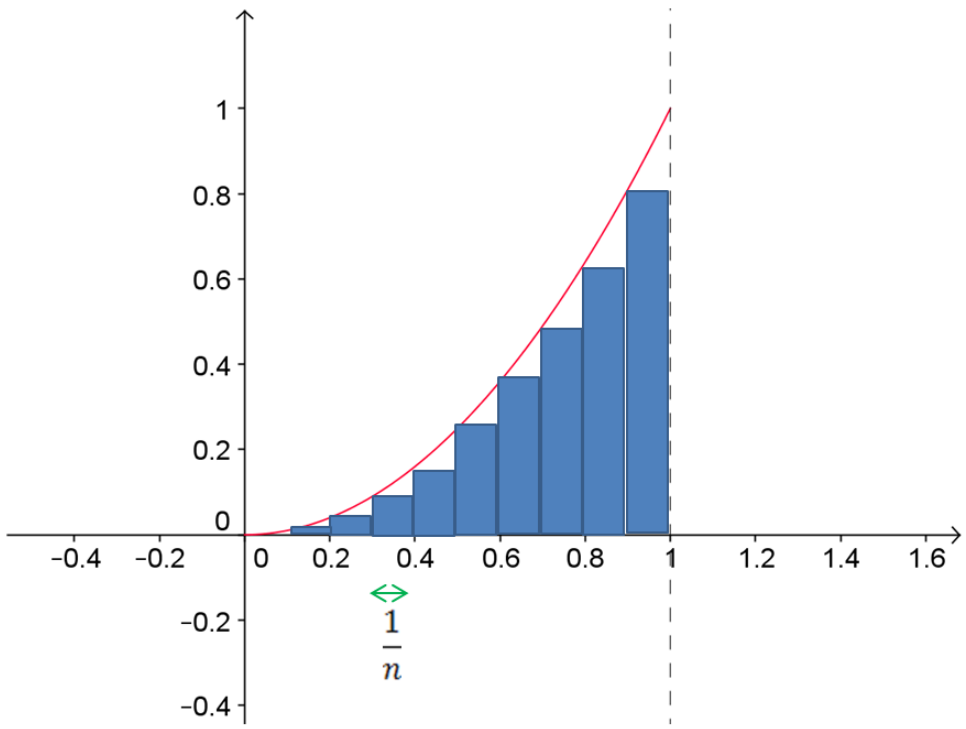
2) Un second exemple

Considérons la courbe représentative de la fonction carré f dans un repère orthonormé et posons nous le problème d'évaluer l'aire A située entre cette courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (hachurée sur la figure).



En appliquant le même procédé que pour la demi-boule, nous pouvons approcher cette aire, en découpant l'intervalle $[0; 1]$ en n parties égales et en considérant une somme A_n d'aires de $n-1$ rectangles situés sous la courbe et de largeur :

$$h = \frac{1}{n}$$



L'aire a_k du rectangle d'indice k, qualifié d'élémentaire, est :

$$a_k = f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3}$$

L'aire cherchée est donc :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}$$

La suite A_n tend donc vers une limite qui est l'aire A, à savoir :

$$A = \frac{1}{3}$$

Notons qu'il est possible d'approcher A par une somme A'_n d'aires rectangulaires qui soit plus grande, en prenant pour le rectangle d'indice k :

$$a'_k = f\left(\frac{k+1}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 = \frac{(k+1)^2}{n^3}$$

$$A'_n = \sum_{k=1}^{n-1} a'_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

Cette suite A'_n tend alors vers la même limite que la suite A_n, ce qui au passage, nous conforte par le théorème des gendarmes sur le fait que $A = \frac{1}{3}$ car la géométrie nous montre à l'évidence que :

$$A_n < A < A'_n$$

3) <u>Vers un concept mathématique rigoureux</u>

Reprenons le problème du calcul, pour une courbe, que nous supposerons continue et positive dans un premier temps, de l'aire A de la région située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, sachant que la fonction est continue sur $[a; b]$.

En procédant comme dans l'exemple 2, nous pouvons considérer deux suites d'approximation pour cette aire :

La première, A_n, formée de rectangles élémentaires situés sous la courbe lorsque la fonction est croissante, est qualifiée de petite somme de Riemann et s'écrit :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

où a_k est l'aire du rectangle d'indice k de largeur :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Ainsi :

$$a_k = f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$$

D'où :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)$$

La seconde, A'_n , formée de rectangles élémentaires situés au dessus de la courbe lorsque la fonction est croissante, est qualifiée de grande somme de Riemann et s'écrit :

$$A'_n = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k$$

où a'_k est l'aire du rectangle d'indice k de largeur :

$$a'_k = f\left(a + (k+1)\ \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$$

D'où :

$$A'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(a + (k+1)\ \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}\right) =$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\ \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)$$

La largeur de chaque rectangle élémentaire est appelée pas de la subdivision de l'intervalle $[a; b]$. Comme n doit tendre vers l'infini pour que les petites sommes et grande sommes de Riemann tendent vers l'aire A cherchée, le pas tend donc vers 0. Devenant un infiniment petit, on le note dx en Mathématiques si la variable de la fonction est x, et l'aire A est notée :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

On qualifie A d'intégrale de Riemann de la fonction x entre les bornes a et b.

L'approche que nous venons de faire est toutefois insuffisante pour donner un concept suffisamment riche qui permet d'envisager un calcul d'aire pour des fonctions plus générales non nécessairement continues ou continues par morceaux. Nous allons donc étudier le concept d'intégrale de Riemann le plus général, lequel repose sur la notion de fonction en escalier.

II Intégrale de Riemann

1) Subdivision d'un intervalle fermé borné

Soit un intervalle $[a; b]$, on qualifie de subdivision de $[a; b]$ en n parties, une suite finie $\sigma = (x_n)$ strictement croissante à $n + 1$ éléments de valeur initiale a et finale b, soit :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

On qualifie de subdivision régulière, une subdivision pour laquelle on a :

$$\forall\, k \in [\![0; n-1]\!] : \quad x_{k+1} - x_k \text{ constant}$$

Cette dernière quantité est alors appelée **pas régulier** de la subdivision et vaut :

$$p(\sigma) = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

Lorsque la subdivision n'est pas régulière, on qualifie de **pas** la quantité :

$$\boxed{\boldsymbol{p(\sigma) = Sup_{[\![0;n-1]\!]}\, |x_{k+1} - x_k|}}$$

2) Fonction en escalier sur $[a;b]$ et intégrale d'une telle fonction

Soit une fonction φ définie sur un intervalle $[a;b]$, on dit que φ est en escalier sur $[a;b]$ si il existe une subdivision x_n en n parties de $[a;b]$ telle que :

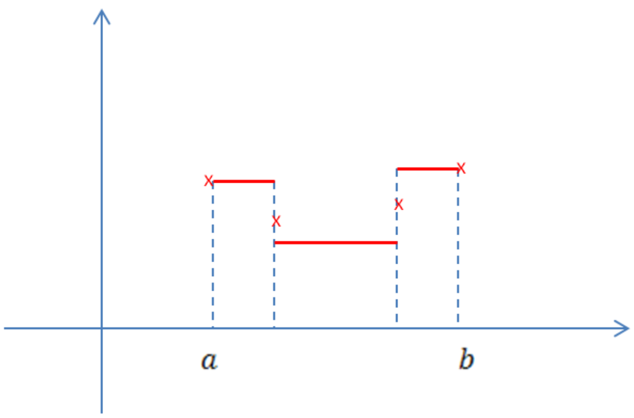
$$\forall\, k \in [\![0;n-1]\!] :\ \exists\, a_k \in \mathbb{R} :\ \forall\, x \in\ ]x_k\,;x_{k+1}[\ :\ \varphi(x) = a_k$$

On définit alors l'intégrale de cette fonction sur $[a;b]$ par :

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(x_{k+1} - x_k)}$$

A noter que cette quantité peut être positive, négative ou nulle. C'est donc un concept algébrique. Il n'y a que lorsque φ est positive que ce concept se traduit en termes d'aire.

Nous conviendrons de noter $Esc[a;b]$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$



Exemple de fonction en escalier sur une subdivision en 3 segments

3) Stabilité des fonctions en escalier pour les opérations usuelles

Soit φ et ψ deux fonctions en escalier définie sur un intervalle $[a;b]$ et α un nombre réel alors la fonction somme $\varphi + \psi$, la fonction produit $\varphi \times \psi$, la fonction $\alpha\, \varphi$ et la fonction inverse $\frac{1}{\varphi}$ si φ ne s'annule pas, sont des fonctions en escalier sur $[a;b]$

Preuve :

L'union des subdivisions associées à φ et ψ constitue une subdivision de $[a;b]$ que l'on peut noter :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Sur chaque sous intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ de la subdivision, φ et ψ sont constantes donc $\varphi+\psi$, $\varphi \times \psi$, $\alpha\,\varphi$ et $\frac{1}{\varphi}$, si φ ne s'annule pas, le sont également. Il en résulte les propriétés.

4) Intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné

Soit une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur un intervalle $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$. On considère les deux sous-ensembles suivants de réels :

$$\mathbb{E}^{+} = \left\{ \int_{a}^{b} \boldsymbol{\psi(x)dx} \;:\; \boldsymbol{\psi \in Esc[a;b] \;\; et \;\; \psi \geq f} \right\}$$

$$\mathbb{E}^{-} = \left\{ \int_{a}^{b} \boldsymbol{\varphi(x)dx} \;:\; \boldsymbol{\varphi \in Esc[a;b] \;\; et \;\; \varphi \leq f} \right\}$$

On dit que $\boldsymbol{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ si la borne supérieure de $\mathbb{E}^{-}$ est égale à la borne inférieure de $\mathbb{E}^{+}$ et on note dans ce cas :

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{Sup}(\mathbb{E}^{-}) = \boldsymbol{Inf}(\mathbb{E}^{+})$$

Une fonction en escalier sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ est de façon évidente intégrable au sens de Riemann et son intégrale au sens de Riemann est l'intégrale initialement définie pour une fonction en escalier

Voyons tout de suite un exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$**.**

$$f(x) = 1 \;\text{ si }\; x \in \mathbb{Q} \;, \qquad 0 \;\text{ sinon}$$

Soit une fonction ψ en escalier majorante de f. Elle vérifie alors, puisque, sur tout intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ défini par la subdivision associée à ψ, il y a des rationnels :

$$\psi(x) = a_k \geq 1 \text{ sur }]x_k\,;x_{k+1}[$$

Donc :

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(x_{k+1}-x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) = 1$$

D'où :

$$Inf(\mathbb{E}^+) \geq 1$$

Soit une fonction φ en escalier minorante de f. Elle vérifie alors, puisque, sur tout intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ défini par la subdivision associée à φ, il y a des rationnels :

$$\varphi(x) = a_k \leq 0 \text{ sur }]x_k\,;x_{k+1}[$$

donc :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(x_{k+1}-x_k) \leq 0$$

d'où :

$$Sup(\mathbb{E}^-) \leq 0$$

On a donc finalement :

$$Sup(\mathbb{E}^-) \neq Inf(\mathbb{E}^+)$$

f n'est donc pas intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$

5) <u>Caractérisation de l'intégrabilité au sens de Riemann</u>

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ si et seulement si il existe deux suites φ_n et ψ_n de fonctions en escaliers sur $[a;b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Dans le cas où f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$, les suites φ_n et ψ_n sont qualifiées de suites d'approximation de f pour l'intégrale et on a :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \boldsymbol{\psi_n(x)dx} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \boldsymbol{\varphi_n(x)\, dx}$$

<u>Preuve :</u>

Notons :

$$\mathbb{E}^+ = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \ : \ \psi \in Esc[a;b] \ \ et \ \ \psi \geq f \right\}$$

$$\mathbb{E}^- = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ : \ \varphi \in Esc[a;b] \ \ et \ \ \varphi \leq f \right\}$$

$(\Rightarrow)$ Supposons f intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ alors

$$I = Sup(\mathbb{E}^-) = Inf(\mathbb{E}^+)$$

Soit un entier naturel n non nul. Alors :

$$I - \frac{1}{n} < I$$

Donc :

$$\exists\ \varphi_n \in Esc[a;b] \ : \ \varphi_n \leq f \ \text{ et } \ I - \frac{1}{n} < \int_a^b \varphi_n(x)dx < I$$

De même :

$$I < I + \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\exists\ \psi_n \in Esc[a;b] \ : \ \psi_n \leq f \ \text{ et } \ I < \int_a^b \psi_n(x)dx < I + \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes montre alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = I$$

$(\Leftarrow)$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\ \in \mathbb{E}^- \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_n(x)\,dx\ \in \mathbb{E}^+$$

Donc :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\ \leq Sup(\mathbb{E}^-) \quad \text{et} \quad Inf(\mathbb{E}^+) \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

Soit :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \leq Sup(\mathbb{E}^-) \leq Inf(\mathbb{E}^+) \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

Le théorème de gendarmes donne alors :

$$Sup(\mathbb{E}^-) = Inf(\mathbb{E}^+) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = I$$

6) **<u>Caractérisation équivalente</u>** :

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ si et seulement si il existe deux suites φ_n et α_n de fonctions en escaliers sur $[a;b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \alpha_n(x)dx = 0$$

Dans le cas où f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$on a

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \boldsymbol{\varphi_n(x)\, dx}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ Supposons f intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ alors, d'après ce qui précède, il existe deux suites φ_n et ψ_n de fonctions en escaliers sur $[a;b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx$$

La suite de fonctions $\alpha_n = \psi_n - \varphi_n$ est alors une suite de fonctions en en escaliers sur $[a;b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \alpha_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)\, dx = 0$$

$(\Leftarrow)$

Notons :

$$\mathbb{E}^+ = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \ :\ \psi \in Esc[a;b]\ \ et\ \ \psi \geq f \right\}$$

$$\mathbb{E}^- = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ :\ \varphi \in Esc[a;b]\ \ et\ \ \varphi \leq f \right\}$$

$$\int_a^b (\varphi_n(x) - \alpha_n(x))dx \ \in \mathbb{E}^- \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi_n(x) + \alpha_n(x))dx \ \in \mathbb{E}^+$$

Donc :

$$\int_a^b (\varphi_n(x) - \alpha_n(x))dx \leq Sup(\mathbb{E}^-) \leq Inf(\mathbb{E}^+) \leq \int_a^b (\varphi_n(x) + \alpha_n(x))dx$$

Soit :

$$0 \leq Inf(\mathbb{E}^+) - Sup(\mathbb{E}^-) \leq \int_a^b (\varphi_n(x) + \alpha_n(x))dx - \int_a^b (\varphi_n(x) - \alpha_n(x))dx = 2 \int_a^b \alpha_n(x)dx$$

Le théorème des gendarmes conduit alors à :

$$Inf(\mathbb{E}^+) - Sup(\mathbb{E}^-) = 0$$

Donc f intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

7) <u>Caractère borné d'une intégrale de Riemann</u>

Si f intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ alors f est bornée sur $[a; b]$

De plus, si $\forall\, x \in [a; b] : m \leq f(x) \leq M$ alors, il existe une suite d'approximation φ_n de f pour l'intégrale sur $[a; b]$ qui vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in [a; b] : m \leq \varphi_n(x) \leq M$$

<u>Preuve</u> :

il existe deux suites φ_n et ψ_n de fonctions en escaliers sur $[a; b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a; b] : \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \big(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big)dx = 0$$

Or toute fonction en escalier est bornée, ainsi en prenant m_1 minorant de φ_1 et M_1 majorant de ψ_1 sur $[a; b]$ on a :

$$\forall\, x \in [a; b] : m_1 \leq \varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \leq M_1$$

f est donc bornée sur $[a; b]$

Pour la seconde partie de la preuve, définissons deux nouvelles suites de fonctions en escaliers majorantes et minorantes de la façon suivante :

Si $\varphi_n(x) < m$ posons $\varphi_{1n}(x) = m$

sinon, on a nécessairement $m \leq \varphi_n(x) \leq M$ car $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq M$ et nous posons $\varphi_{1n}(x) = \varphi_{1n}(x)$

Si $\psi_n(x) > M$ posons $\psi_{1n}(x) = M$

sinon, on a nécessairement $m \leq \psi_n(x) \leq M$ car $m \leq f(x) \leq \psi_n(x)$ et nous posons $\psi_{1n}(x) = \psi_n(x)$

On a alors :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ \varphi_n(x) \leq \varphi_{1n}(x) \leq f(x) \leq \psi_{1n}(x) \leq \psi_n(x)$$

soit :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ 0 \leq \psi_{1n}(x) - \varphi_{1n}(x) \leq \psi_n(x) - \varphi_n(x)$$

donc :

$$0 \leq \int_a^b \big(\psi_{1n}(x) - \varphi_{1n}(x)\big)\, dx \leq \int_a^b \big(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big)\, dx$$

et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \big(\psi_{1n}(x) - \varphi_{1n}(x)\big)\, dx = 0$$

La suite φ_{1n} est donc une suite d'approximation de de f pour l'intégrale sur $[a;b]$ qui vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in\ [a;b] :\ m \leq \varphi_{1n}(x) \leq M$$

8) **<u>Intégrabilité d'une fonction continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$</u>**

Si $\boldsymbol{f}$ est continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ alors $\boldsymbol{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$

Avant d'établir la preuve, nous allons établir un résultat préliminaire en commençant par définir la notion d'uniforme continuité sur un segment $[a;b]$

On dit d'une fonction $\boldsymbol{f}$ qu'elle est uniformément continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ si :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists\, \beta > 0 :\ \forall\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in [\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]^2 :\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < \beta\ \Rightarrow\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \varepsilon}$$

Toute fonction uniformément continue sur $[a;b]$ est de façon triviale continue sur $[a;b]$ et nous allons voir que la réciproque est vraie, autrement dit :

f continue sur $[a;b] \Leftrightarrow f$ uniformément continue sur $[a;b]$

Preuve :

Supposons f continue sur $[a;b]$ et non uniformément continue sur $[a;b]$ alors, en prenant la négation de la définition de l'uniforme continuité, nous avons :

$$\exists\ \varepsilon_1 > 0\ \ \forall\ \beta > 0 :\ \exists\ (x,y) \in [a;b]^2 :\ \ |x-y| < \beta\ \text{ et }\ |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_1$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul n :

$$\exists\ (x_n, y_n) \in [a;b]^2 :\ \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n}\ \text{ et }\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_1$$

x_n étant une suite bornée, on peut extraire de cette suite une sous-suite $x_{g(n)}$ convergente et $y_{g(n)}$ étant bornée, on peut extraire de cette suite une sous-suite $y_{k(n)}$ convergente.

Les suites $x_{k(n)}$ et $y_{k(n)}$ sont donc deux suites convergentes. Posons :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{k(n)} = x_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_{k(n)} = y_0$$

Puisque les termes $x_{k(n)}$ et $y_{k(n)}$ sont dans $[a;b]$, leur limite l'est également, donc par continuité :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_{k(n)}\right) = f(x_0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(y_{k(n)}\right) = f(y_0)$$

Or :

$$\left|x_{k(n)} - y_{k(n)}\right| < \frac{1}{n}\ \text{ et }\ \left|f(x_{k(n)}) - f(y_{y_{k(n)}})\right| \geq \varepsilon_1$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$|x_0 - y_0| = 0\ \text{ et }\ |f(x_0) - f(y_0)| \geq \varepsilon_1$$

Ce qui est absurde, donc f est uniformément continue sur $[a;b]$

Revenons alors à l'intégrabilité de f au sens de Riemann sur $[a; b]$

Traduisons l'uniforme continuité de f pour $\varepsilon = 1/n$:

$$\exists\, \beta > 0 : \ \forall\, (x, y) \in [a; b]^2 : \ |x - y| < \beta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$$

Définissons alors une fonction en escalier φ_n sur une subdivision régulière de $[a; b]$ de pas :

$$h = \frac{b - a}{N}$$

en choisissant une valeur de N telle que :

$$h < \beta$$

La subdivision est alors définie par la relation de récurrence, pour $0 \leq k \leq N - 1$:

$$x_{k+1} = x_k + h$$

Et on définit φ_n par :

$$\forall\, x \in [x_k \,;\, x_{k+1}[\ : \ \varphi_n(x) = f(x_k)$$

$$\varphi_n(b) = f(b)$$

On a alors :

$$\forall\, x \in [x_k \,;\, x_{k+1}[\ : \ |x - x_k| < \beta \ \text{ donc } \ |f(x) - f(x_k)| < \frac{1}{n}$$

D'où :

$$\forall\, x \in [a; b] : \ |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}$$

Définissons alors la fonction en escalier α_n par :

$$\forall\, x \in [a; b] : \ \alpha_n(x) = \frac{1}{n}$$

Nous avons :

$$\int_a^b \alpha_n(x) dx = \frac{b - a}{n}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \alpha_n(x) dx = 0$$

f est donc intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

9) Intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction bornée et continue sauf en nombre fini de points

Si f est bornée et continue sauf en un nombre fini de points sur $[a; b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

Preuve :

Par récurrence sur le nombre de points.

Initialisation :

On suppose f bornée et continue sur $[a; b]$ sauf en un point c. Montrons d'abord que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; c]$ dans le cas non trivial $a < c$.

Soit un entier naturel non nul n tel que :

$$a < c - \frac{1}{n} < c$$

Définissons une fonction en escalier φ_n sur $[a; b]$ de la façon suivante :

f étant continue sur $\left[a; c - \frac{1}{n}\right]$ elle est intégrable au sens de Riemann sur le même intervalle et donc, il existe deux suites φ_{1p} et α_{1p} de fonctions en escaliers sur $[a; b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a; c] : \left|f(x) - \varphi_{1p}(x)\right| \leq \alpha_{1p}(x)$$

et :

$$\lim_{p \to +\infty} \int_a^{c-\frac{1}{n}} \alpha_{1p}(x) dx = 0$$

Il existe donc une valeur p_0 de p pour laquelle :

$$\int_a^{c-\frac{1}{n}} \alpha_{1p_0}(x) dx \leq \frac{1}{n}$$

Posons alors , en notant M un majorant de $|f|$ sur $[a; c]$

$$\forall\, x \in \left[a; c - \frac{1}{n}\right] : \ \varphi_n(x) = \varphi_{1p_0}(x) \ , \alpha_n(x) = \alpha_{1p_0}(x)$$

$$\forall\, x \in \left[c - \frac{1}{n}; c\right] : \ \varphi_n(x) = 0 \, , \alpha_n(x) = M$$

On a alors :

$$\forall\, x \in [a; c] : \ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\int_a^c \alpha_n(x)dx = \int_a^{c-\frac{1}{n}} \alpha_n(x)dx + \int_{c-\frac{1}{n}}^{b} \alpha_n(x)dx$$

donc :

$$0 \leq \int_a^c \alpha_n(x)dx \leq \frac{1}{n} + \frac{M}{n}$$

Le théorème des gendarmes montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^c \alpha_n(x)dx = 0$$

f est donc intégrable au sens de Riemann sur $[a; c]$

Un traitement analogue se fait sur $[c; b]$

et donc f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

<u>Hérédité</u> :

Soit n un entier naturel non nul tel que l'on ait : Si f est bornée et continue sauf en un nombre fini de points inférieur ou égal à n sur $[a; b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

Supposons que f soit bornée et continue sauf en un nombre $(n + 1)$ de points sur $[a; b]$ et montrons qu'elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

Soit c un des points de discontinuité.

<u>1^er cas</u> : $a < c < b$

alors il existe $\beta > 0$ tel que f continue sur $[a;\ c - \beta]$, sur $[c - \beta;\ c + \beta]$ et sur $[c - \beta;\ b]$

Sur chacun des trois intervalles précédents, f est continue sauf en un nombre fini de points inférieur ou égal à n, donc intégrable au sens de Riemann. Elle l'est donc sur l'union de ces trois intervalles.

<u>2ème cas</u> : $c = a$

alors il existe $\beta > 0$ tel que f continue sur $[a;\ a+\beta]$ et sur $[a+\beta;\ b]$ et on conclue comme précédemment

<u>3ème cas</u> : $c = b$

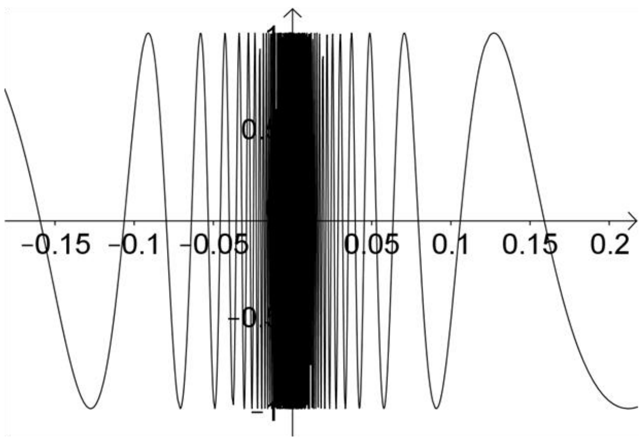
alors il existe $\beta > 0$ tel que f continue sur $[a;\ b-\beta]$ et sur $[b-\beta;\ b]$ et on conclue comme précédemment

<u>Exemple de fonction bornée continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0</u> :

Nous avions déjà présenté cette fonction étrange non continue et non dérivable en 0, mais bornée sur $\mathbb{R}$ et continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$



Et bien, cette fonction est intégrable sur tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$, y compris donc, ceux contenant 0.

10) Propriétés de l'intégrale de Riemann vis-à-vis des opérations

Si f et g sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$ et c un nombre réel, alors les fonctions somme $f+g$, produit $c\,f$, $f\times g$, les fonctions $|f|$, $Sup(f,g)$, $Inf(f,g)$, et la fonction inverse $\frac{1}{f}$ si f est minorée par un réel strictement positif, sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$

De plus :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

et

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \big(c\,f(x)\big)dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Ces deux dernières propriétés sont qualifiées de **linéarité de l'intégrale** en référence à la linéarité de l'application qui à une fonction intégrable au sens de Riemann associe son intégrale, l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$ formant un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$

Preuves :

Soit (φ_n,α_n) , (ψ_n,β_n) des couples de suites de fonctions en escalier sur $[a;b]$ tels que **:**

$$\forall\, x \in [a;b] : \ |f(x)-\varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x) \quad \text{et} \quad |g(x)-\psi_n(x)| \leq \beta_n(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \alpha_n(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \beta_n(x)dx = 0$$

1) somme

Posons :

$$\theta_n = \varphi_n + \psi_n\,, \qquad \gamma_n = \alpha_n + \beta_n$$

alors $\forall\ x \in [a; b]$:

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| = |f(x) - \varphi_n(x) + g(x) - \psi_n(x)|$$

donc :

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| + |g(x) - \psi_n(x)|$$

soit :

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq \alpha_n(x) + \beta_n(x) = \gamma_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \gamma_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \alpha_n(x)dx + \int_a^b \beta_n(x)dx \right) = 0$$

donc $f + g$ intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \varphi_n(x)\ dx + \int_a^b \psi_n(x)\ dx \right)$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

2) <u>Produit par une constante</u>

Posons :

$$\theta_n = c\ \varphi_n\ , \qquad \gamma_n = |c|\ \alpha_n$$

alors $\forall\ x \in [a; b]$:

$$|c\ f(x) - \theta_n(x)| = |c\ f(x) - c\ \varphi_n(x)| \leq |c|\ |f(x) - \varphi_n(x)|$$

donc :

$$|c\ f(x) - \theta_n(x)| \leq \gamma_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \gamma_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(c \int_a^b \alpha_n(x)dx \right) = 0$$

donc $c\ f$ intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b \big(c\, f(x)\big)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} c \int_a^b \varphi_n(x)dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

3) <u>Produit de fonctions</u>

Posons :

$$\theta_n = \varphi_n\, \psi_n$$

alors $\forall\, x \in [a; b]$:

$$|f(x)g(x) - \theta_n(x)| = |f(x)\, g(x) - \varphi_n(x)\psi_n(x)|$$

$$= \big|\big(f(x) - \varphi_n(x)\big)\, g(x) + \varphi_n(x)\, \big(g(x) - \psi_n(x)\big)\big|$$

donc :

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq |f(x) - \varphi_n(x)|\, |g(x)| + |g(x) - \psi_n(x)|\, |\varphi_n(x)|$$

soit :

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq \alpha_n(x)\, |g(x)| + \beta_n(x)|\varphi_n(x)|$$

Or f étant intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$, elle est bornée. Soit donc M un majorant de $|f|$ sur $[a; b]$. Nous avons vu qu'il était possible de prendre une suite d'approximation φ_n telle que M soit un majorant de la valeur absolue de chaque φ_n. Nous avons alors en notant N un majorant de $|g|$ sur $[a; b]$:

$$\forall\, x \in [a; b] :\ |f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq \alpha_n(x)\, N + \beta_n(x)\, M$$

Posons :

$$\gamma_n(x) = \alpha_n(x)\, N + \beta_n(x)\, M$$

alors :

$$|f(x) + g(x) - \theta_n(x)| \leq \gamma_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \gamma_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(N \int_a^b \alpha_n(x)dx + M \int_a^b \beta_n(x)dx \right) = 0$$

donc $f \times g$ intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

4) <u>Valeur absolue</u>

Posons :

$$\theta_n = |\varphi_n| , \qquad \gamma_n = \alpha_n$$

alors $\forall\, x \in [a; b]$:

$$\big||f(x)| - \theta_n(x)\big| = \big||f(x)| - |\varphi_n(x)|\big| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

Donc $|f|$ intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

5) <u>Sup et Inf de deux fonctions</u>

Il suffit de noter que :

$$Sup(f, g) = \frac{1}{2}\ (f + g + |f - g|)$$

$$Inf(f, g) = \frac{1}{2}\ (f + g - |f - g|)$$

En effet pour deux nombres réels x et y quelconques on a :

Ou bien $x > y$ et :

$$Sup(x, y) = x = \frac{1}{2}\ (x + y + x - y) = \frac{1}{2}\ (x + y + |x - y|)$$

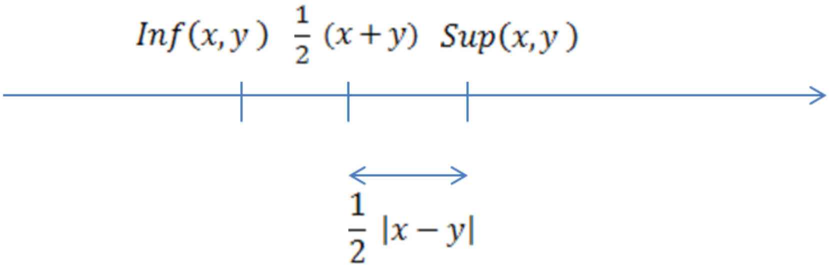
$$Inf(x, y) = y = \frac{1}{2}\ \big(x + y - (x - y)\big) = \frac{1}{2}\ (x + y - |x - y|)$$

Ou bien $x \leq y$ et :

$$Sup(x, y) = y = \frac{1}{2}\ \big(x + y - (x - y)\big) = \frac{1}{2}\ (x + y + |x - y|)$$

$$Inf(x, y) = x = \frac{1}{2}\ \big(x + y + (x - y)\big) = \frac{1}{2}\ (x + y - |x - y|)$$

A noter que cela se voit aisément sur un schéma :



6) <u>Inverse</u>

Soit m un réel strictement positif minorant de f. Nous avons qu'on peut trouver une suite d'approximation φ_n telle que :

$$\forall\, x \in [a;b] : m \leq \varphi_n(x)$$

Posons :

$$\theta_n(x) = \frac{1}{\varphi_n(x)}$$

alors :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \theta_n(x)\right| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\varphi_n(x)}\right| = \left|\frac{\varphi_n(x) - f(x)}{f(x)\,\varphi_n(x)}\right| = \frac{|f(x) - \varphi_n(x)|}{|f(x)|\,|\varphi_n(x)|}$$

Donc :

$$\forall\, x \in [a;b] : \left|\frac{1}{f(x)} - \theta_n(x)\right| \leq \frac{|f(x) - \varphi_n(x)|}{c \times c} \leq \frac{\alpha_n(x)}{c^2}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{\alpha_n(x)}{c^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{c^2} \int_a^b \alpha_n(x) dx = 0$$

Donc $\frac{1}{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$

11) Propriétés de comparaison

Si f et g sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$ alors :

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Preuve **:**

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors il existe une suite d'approximation φ_n qui vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in [a;b] : \varphi_n(x) \geq 0$$

Donc :

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \geq 0$$

Par passage à la limite :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si maintenant $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors $f - g \geq 0$ donc :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0$$

soit par linéarité :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

12) Relation de Chasles

Si $\boldsymbol{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ alors on définit :

$$\boldsymbol{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\boldsymbol{f}$ est alors intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{c}]$ et $[\boldsymbol{c};\boldsymbol{b}]$ pour tout réel $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$$

Preuve :

Soit (φ_n, α_n) un couple de suites de fonctions en escalier sur $[a;b]$ tels que **:**

$$\forall\, x \in [a;b] :\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \alpha_n(x)\,dx = 0$$

Posons :

$$\forall\, x \in [a;c] :\ \varphi_{1n}(x) = \varphi_n(x), \qquad \alpha_{1n}(x) = \alpha_n(x)$$

alors :

$$\forall\, x \in [a;c] :\ |f(x) - \varphi_{1n}(x)| \leq \alpha_{1n}(x)$$

et

$$0 \leq \int_a^c \alpha_{1n}(x)dx \leq \int_a^b \alpha_{1n}(x)dx$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^c \alpha_{1n}(x)\,dx = 0$$

Donc f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;c]$. Le même raisonnement se fait sur $[c;b]$

Posons :

$$\forall\, x \in [c;b] : \ \varphi_{2n}(x) = \varphi_n(x), \qquad \alpha_{2n}(x) = \alpha_n(x)$$

alors :

$$\forall\, x \in [c;b] : \ |f(x) - \varphi_{2n}(x)| \leq \alpha_{2n}(x)$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_c^b \alpha_{2n}(x)\,dx = 0$$

Nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^c \varphi_{1n}(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_c^b \varphi_{2n}(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

D'autre part :

$$\int_a^c \varphi_{1n}(x)\,dx + \int_c^b \varphi_{2n}(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Par passage à la limite, il en résulte :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

En particulier :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

13) Première formule de la moyenne

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ posons :

$$m = Inf_{[a;b]}(f) \quad M = Sup_{[a;b]}(f)$$

alors :

$$\exists\, k \in [m;M] : \int_a^b f(x)\,dx = k\,(b-a)$$

En particulier, si f est continue sur $[a;b]$:

$$\exists\, c \in]a;b[: \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

Avant de faire la preuve, établissons un préliminaire :

Si f est continue, positive ou nulle, mais non identiquement nulle sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

Preuve du préliminaire :

Soit $x_0 \in [a;b]$ tel que : $f(x_0) \neq 0$ alors par continuité en x_0, il existe un intervalle de la forme $[x_0-\alpha;x_0]$ ou $[x_0;x_0+\alpha]$ avec $\alpha > 0$, inclus dans $[a;b]$ et sur lequel la fonction est strictement supérieure à $f(x_0)/2$. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)\,\alpha}{2} > 0$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\alpha} f(x)\,dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)\,\alpha}{2} > 0$$

Preuve initiale:

1er cas : $m = M$, soit f constante sur $[a; b]$ donc, en posant :

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = m\,(b-a) = f(c)(b-a)$$

2ème cas : $m < M$

$$\forall\, x \in [a; b] :\ m \leq f(x) \leq M$$

Par comparaison :

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

donc :

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

On pose alors :

$$k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

et on obtient le résultat cherché

Si f est continue sur $[a; b]$, alors, sachant que les fonctions $f - m$ et $M - f$ sont continues, positives ou nulles et non identiquement nulles sur $[a; b]$, on a :

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx$$

Soit :

$$m < k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M$$

f étant continue sur $[a;b]$ atteint ses bornes donc :

$$\exists\,(u,v) \in [a;b]^2 :\ m = f(u) \quad M = f(v)$$

le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel $c \ \in\ ]u;v[$ si $u < v$ ou $]v;u[$ si $v < u$ donc $c \ \in\ ]a;b[$tel que :

$$k = f(c)$$

III Sommes de Darboux et de Riemann

1) Théorème fondamental

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{S}[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ l'ensemble des subdivisions de $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et $\boldsymbol{\sigma}$ un élément de $\boldsymbol{S}[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$: $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b}$ dont le pas est défini par :

$$\boldsymbol{p(\sigma) = Sup_{[\![0;n-1]\!]}|x_{k+1} - x_k|}$$

Posons pour $\boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{0};\boldsymbol{n-1}]\!]$:

$$\boldsymbol{m_k = Inf_{[x_k\,;\,x_{k+1}]}(f) \quad M_k = Sup_{[x_k\,;\,x_{k+1}]}(f)}$$

alors :

$\forall\,\boldsymbol{\varepsilon} \in\ ]\boldsymbol{0};+\infty[\ \ \exists\,\boldsymbol{\eta} \in\ ]\boldsymbol{0};+\infty[\ :\ \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{S}[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]\ \ \forall\,(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k=0}\text{ à }\boldsymbol{n-1}} :\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}} \in [\boldsymbol{m_k}\,;\ \boldsymbol{M_k}]$:
$\boldsymbol{p(\sigma)} < \eta \Rightarrow \left\lvert \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{y_k\,(x_{k+1} - x_k)} \right\rvert < \boldsymbol{\varepsilon}$

Preuve :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\,(x_{k+1} - x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} y_k \; dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - y_k)\, dx$$

Donc :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \; (x_{k+1} - x_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - y_k|\, dx$$

Soit (φ_m, α_m) un couple de suites de fonctions en escalier sur $[a;b]$ tels que **:**

$$\forall\, x \in [a;b] :\; |f(x) - \varphi_m(x)| \leq \alpha_m(x)$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \alpha_m(x)\, dx = 0$$

Notons σ_m une subdivision adaptée à φ_m et α_m désignée par la suite : $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p(m)}$

Deux cas peuvent alors se présenter pour chaque $k \in [\![0; n-1]\!]$

<u>1er cas</u> :

L'intervalle $[x_k\,;\; x_{k+1}]$ est inclus dans un des intervalles $\left[t_j\,;\; t_{j+1}\right]$ alors :

$$\forall\, x \in [x_k\,;\; x_{k+1}] :\;\; \varphi_m(x) - \alpha_m(x) \leq f(x) \leq \varphi_m(x) + \alpha_m(x)$$

donc :

$$\varphi_m(x) - \alpha_m(x) \leq m_k \leq y_k \leq M_k \leq \varphi_m(x) + \alpha_m(x)$$

soit :

$$|\varphi_m(x) - y_k| \leq \alpha_m(x)$$

On a alors :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - y_k|\, dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - \varphi_m(x) + \varphi_m(x) - y_k|\, dx$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - y_k|dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - \varphi_m(x)|dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi_m(x) - y_k|dx$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - y_k|dx \leq 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha_m(x)\, dx$$

<u>2ème cas</u> :

L'intervalle $[x_k\,;\, x_{k+1}]$ n'est pas inclus dans un des intervalles $\left[t_j\,;\, t_{j+1}\right]$ donc contient au moins un point de la subdivision σ_m. Alors, en notant M un majorant de $|f|$ sur $[a; b]$, on a :

$$\forall\, x \in [x_k\,;\, x_{k+1}] \;:\; |f(x) - y_k| \leq |f(x)| + |y_k| \leq 2\, M$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - y_k|dx \leq\; 2\, M\, (x_{k+1} - x_k) \leq 2\, M\, p(\sigma)$$

Notons I_1 l'ensemble des entiers k correspondant au premier cas et I_2 celui des entiers k correspondant au deuxième cas. Nous avons alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\, (x_{k+1} - x_k) \right| \leq 2 \sum_{k \in I_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha_m(x)\, dx + \sum_{k \in I_2} 2\, M\, p(\sigma)$$

Or le nombre d'éléments de I_2 est inférieur ou égal à $2\, p(m)$ donc :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\, (x_{k+1} - x_k) \right| \leq 2 \int_a^b \alpha_m(x)\, dx + 4\, M\, p(m)\, p(\sigma)$$

En fixant alors une valeur m telle que :

$$2 \int_a^b \alpha_m(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

puis en prenant une valeur η telle que :

$$0 < 4\, M\, p(m)\, \eta < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors :

$$p(\sigma) < \eta \quad \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\ (x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon$$

2) Sommes de Riemann à pas régulier

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$, $S[a;b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a;b]$ et σ un élément de $S[a;b]$ à pas régulier c'est-à-dire une suite $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ pour laquelle on a :

$$\forall\, k \in [\![0; n-1]\!] \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

autrement dit :

$$\forall\, k \in [\![0; n]\!] \ : \ x_k = a + k\ \frac{b-a}{n}$$

alors, une somme de Riemann à pas régulier est une suite de la forme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\ (x_{k+1} - x_k)$$

où $\forall\, k \in [\![0; n]\!]\ :\ c_k \in [x_k\,; x_{k+1}]$

et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si $c_k = x_k$ la somme est qualifiée de petite somme de Riemann et si $c_k = x_{k+1}$ la somme est qualifiée de grande somme de Riemann.

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème fondamental car le pas de la subdivision régulière associée à S_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

IV Calcul intégral à l'aide de primitive

1) Théorème du calcul intégral par primitive

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ admettant sur cet intervalle une primitive $\boldsymbol{F}$, c'est-à-dire, une fonction dérivable sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ telle que :

$$\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] : \ \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

alors :

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$$

La quantité $[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$ est appelée crochet de variation de $\boldsymbol{F}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ et a les mêmes propriétés de linéarité que l'intégrale, à savoir, $\boldsymbol{c}$ étant un réel quelconque :

$$[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} + [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$$

$$[\boldsymbol{c}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{c}\, [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$$

Preuve

Soit une subdivision régulière de $[a; b]$ en n parties égales désignée par :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

alors on a :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)$$

Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'une suite finie de réels $c_k \in]x_k\,; x_{k+1}[$ tels que :

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(c_k)(x_{k+1} - x_k) = f(c_k)(x_{k+1} - x_k)$$

donc :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k)$$

La quantité du membre de droite est une somme de Riemann associée à f sur $[a;b]$. Par passage à la limite, on en déduit :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Voyons la linéarité du crochet de variation :

$$[F(x) + G(x)]_a^b = \big(F(b) + G(b)\big) - \big(F(a) + G(a)\big)$$

$$= \big(F(b) - F(a)\big) + (G(b) - G(a)) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$$

$$[c\, F(x)]_a^b = c\, F(b) - c\, F(a) = c\, \big(F(b) - F(a)\big) = c\, [F(x)]_a^b$$

2) <u>Exemples simples de calcul</u>

$$\int_0^1 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

V Continuité et dérivabilité des fonctions intégrales

1) Théorème fondamental

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ et $c \in [a;b]$. Considérons la fonction définie sur $[a;b]$ par :

$$\boldsymbol{F(x) = \int_c^x f(t)\,dt}$$

alors F est continue sur $[a;b]$

Si de plus f est continue sur $[a;b]$ alors F est dérivable sur $[a;b]$ et :

$$\forall\, \boldsymbol{x \in [a;b] :\ F'(x) = f(x)}$$

Preuve :

Soit $x_0 \in [a;b]$ et h tel que $x_0 + h \in [a;b]$ alors :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

donc, en notant M un majorant de $|f|$ sur $[a;b]$:

si $h \geq 0$

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} M\ dt = M\,h$$

si $h < 0$

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_0+h}^{x_0} M\,dt = M\,(-h)$$

Donc par théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0} F(x_0+h) - F(x_0) = 0$$

F est donc continue en 0

Si de plus f est continue sur $[a; b]$ alors :

si $h > 0$, lorsque ce cas est à considérer :

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\right|$$

Or d'après la formule de la moyenne, il existe $c(h) \in]x_0 ; x_0 + h[$ tel que :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = h\,f\big(c(h)\big)$$

Donc :

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \big|f\big(c(h)\big) - f(x_0)\big|$$

Or :

$$x_0 < c(h) < x_0 + h$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0^+} c(h) = x_0$$

Donc par continuité :

$$\lim_{h\to 0^+} f\big(c(h)\big) = f(x_0)$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Un travail analogue pour $h < 0$ lorsque ce cas est à considérer, conduit à:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Donc F est dérivable en x_0 et :

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

2) Conséquence pour les intégrales à bornes variables

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$ telles que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{I})$ et $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{I})$ soient inclus dans $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$. Considérons la fonction :

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}^{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{dt}$$

alors $\boldsymbol{g}$ est continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$

Si de plus $\boldsymbol{f}$ est continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ alors $\boldsymbol{g}$ est dérivable sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}] :\ \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\big) - \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big)$$

Preuve :

Il suffit de noter que :

$$g(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\, dt - \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$$

Et de noter :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

On a alors :

$$g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

Et on applique les propriétés de la composition pour la continuité et la dérivabilité.

VI Intégration par parties

1) Théorème d'intégration par partie

Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions telles que $\boldsymbol{u'}$ et $\boldsymbol{v'}$ soient intégrables au sens de Riemann sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ alors :

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{u'(x)\, v(x)\, dx} = [\boldsymbol{u(x)\, v(x)}]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \boldsymbol{u(x)\, v'(x)\, dx}$$

Preuve :

On a :

$$\forall\, x \in [a;\ b]\ :\ \big(u(x)\, v(x)\big)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

donc :

$$\int_{a}^{b} \big(u(x)\, v(x)\big)'\, dx = \int_{a}^{b} \big(u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)\big)\, dx$$

Soit, en utilisant la linéarité de l'intégrale et le théorème de calcul intégral par primitive :

$$[u(x)\, v(x)]_{a}^{b} = \int_{a}^{b} u'(x)\, v(x)\, dx + \int_{a}^{b} u(x)\, v'(x)\, dx$$

Il en résulte l'égalité cherchée.

2) Exemples d'usage

Les fonctions produit d'un polynôme par une exponentielle ou un logarithme s'intègrent facilement. Voyons deux exemples :

Exemple 1 :

Soit à calculer :

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 1)\, e^{-x}\, dx$$

On pose :

$$u(x) = x^2 + 3x - 1\,, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

alors :

$$u'(x) = 2x + 3\,, \qquad v(x) = -e^{-x}$$

Et :

$$I = [(x^2 + 3x - 1\,)\,(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)\,(-e^{-x})\, dx$$

$$I = [(-x^2 - 3x + 1\,)\, e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (2x + 3)\, e^{-x}\, dx$$

Et on refait une intégration par partie en posant :

$$u(x) = 2x + 3\,, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

alors :

$$u'(x) = 2\,, \qquad v(x) = -e^{-x}$$

$$I = [(-x^2 - 3x + 1\,)\, e^{-x}]_0^1 + [(2x + 3\,)\,(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 2\,(-e^{-x})\, dx$$

$$I = [(-x^2 - 3x + 1\,)\, e^{-x}]_0^1 + [(-2x - 3\,)\, e^{-x}]_0^1 - 2\,[e^{-x}]_0^1$$

Et on finalise, par linéarité du crochet de variation :

$$I = [(-x^2 - 5\,x - 4\,)\, e^{-x}]_0^1$$

A cette étape, la fonction entre crochet est une primitive de la fonction initiale à intégrer.

On a au bout du compte :

$$I = -10\, e^{-1} + 4$$

Exemple 2 :

Soit à calculer :

$$I = \int_{1}^{2} (x^2 + 3x - 1)\, Ln(x)\, dx$$

On pose :

$$u'(x) = x^2 + 3x - 1\,, \qquad v(x) = Ln(x)$$

alors :

$$u(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x, \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Et :

$$I = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x\right)\, Ln(x)\right]_1^2 - \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x\right) \frac{1}{x}\, dx$$

$$I = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x\right)\, Ln(x)\right]_1^2 - \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}\, x - 1\right)\, dx$$

$$I = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x\right)\, Ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}\, x^2 - x\,\right]_1^2$$

$$I = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - x\right)\, Ln(x) - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}\, x^2 + x\right]_1^2$$

$$I = \left(\left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right)\, Ln(2) - \frac{8}{6} - 3 + 2\right) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1\right)$$

$$I = \frac{20}{3}\, Ln(2) - \frac{29}{12}$$

A noter qu’avec le logarithme, à la différence de l’exponentielle, il n’y a qu’une intégration par partie à effectuer

VII Changement de variable

1) Théorème de changement de variable

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et $\boldsymbol{g}$ une fonction de classe $\boldsymbol{C_1}$ sur un intervalle $[\boldsymbol{c};\boldsymbol{d}]$ telle que $\boldsymbol{g}([\boldsymbol{c};\boldsymbol{d}]) \subset [\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ alors

si $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}))$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{c}^{d} f(g(t))\,g'(t)dt$$

Si $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}))$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{d}^{c} f(g(t))\,g'(t)dt$$

D'un point de vue pratique, on pose :

$$x = g(t)$$

et on différencie l'expression :

$$dx = g'(t)\,dt$$

On remplace ensuite $\boldsymbol{dx}$ et les bornes $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ dans l'intégrale initiale par leurs correspondants en $\boldsymbol{t}$

Preuve :

1er Cas : $(a,b) = (g(c),g(d))$

Considérons les fonctions suivantes définies sur $[c;d]$ par :

$$H(y) = \int_{c}^{y} f(g(t))\,g'(t)dt$$

$$K(y) = \int_{g(c)}^{g(y)} f(x)\,dx$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur $[c; d]$ et on a pour tout y de $[c; d]$:

$$H'(y) = f(g(y))\, g'(y)$$

$$K'(y)) = f(g(y))\, g'(y)$$

Donc :

$$H'(y) = K'(y))$$

Il existe donc une constante λ telle que pour tout y de $[c; d]$:

$$H(y) = K(y) + \lambda$$

Or pour $y = c$

$$H(c) = K(c) + \lambda$$

Donc :

$$\lambda = 0$$

D'où :

$$H(y) = K(y)$$

En particulier pour $y = d$

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_{c}^{d} f(g(t))\, g'(t) dt$$

qui est la relation cherchée.

<u>2ème Cas</u> : $(a, b) = (g(d), g(c))$

La démarche est analogue

2) <u>Exemple d'usage</u>

Soit à déterminer sur $[0; 1]$ une primitive F de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Nous pouvons <u>prendre :</u>

$$F(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1 - y^2}\, dy$$

Posons :

$$y = sin(t)$$

$$dy = cos(t)\ dt$$

$$\sqrt{1-y^2}\ dy = \sqrt{1-sin^2(t)}\ cos(t)\ dt = |cos(t)|\ cos(t)\ dt$$

Or nous pouvons prendre :

$$x = sin(d)\ \text{ avec } d = sin^{-1}(x)$$

$$0 = sin(c) \text{ avec } c = sin^{-1}(0) = 0$$

Nous avons alors :

$$\forall\ t \in [c; d] :\ cos(t) \geq 0$$

Donc :

$$F(x) = \int_0^{sin^{-1}(x)} cos^2(t)\ dt = \int_0^{sin^{-1}(x)} \frac{1+\cos(2\ t)}{2}\ dt$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2\ t)\right]_0^{sin^{-1}(x)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}sin^{-1}(x) + \frac{1}{4}\sin(2\ sin^{-1}(x))$$

$$F(x) = \frac{1}{2}sin^{-1}(x) + \frac{1}{4} \times 2\sin\left(sin^{-1}(x)\right)\cos(sin^{-1}(x))$$

$$F(x) = \frac{1}{2}sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ x\sqrt{1-x^2}$$

VIII Intégrale des fonctions paires, impaires et périodiques

1) Fonctions paires

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[\mathbf{0}\,;\boldsymbol{b}]$ avec $\boldsymbol{b} > 0$ et paire sur $[-\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{b}]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[-\boldsymbol{b}\,;\mathbf{0}]$ et :

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

Preuve :

Soit (φ_n, α_n) un couple de suites de fonctions en escalier sur $[0; b]$ tels que :

$$\forall\, x \in [0; b] :\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{b} \alpha_n(x)\,dx = 0$$

Posons :

$$\forall\, x \in [-b; 0] :\ \varphi_{1n}(x) = \varphi_n(-x), \qquad \alpha_{1n}(x) = \alpha_n(-x)$$

alors :

$$\forall\, x \in [-b; 0] :\ |f(x) - \varphi_{1n}(x)| = |f(-x) - \varphi_n(-x)| \leq \alpha_n(-x) = \alpha_{1n}(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-b}^{0} \alpha_{1n}(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{b} \alpha_n(x)\,dx = 0$$

Donc f est intégrable au sens de Riemann sur $[-b\,; 0]$ et :

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-b}^{0} \varphi_{1n}(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{b} \varphi_n(x)\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

2) **Fonction impaire** :

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[0\,;b]$ avec $b > 0$ et impaire sur $[-b\,;b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[-b\,;0]$ et :

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

Preuve :

Analogue au cas paire

3) **Fonction périodique** :

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0\,;T]$ et périodique de période T alors pour tout réel a, f est intégrable au sens de Riemann sur $[a\,;a+T]$ et :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

Preuve :

Soit (φ_n, α_n) un couple de suites de fonctions en escalier sur $[0;T]$ tels que **:**

$$\forall\, x \in [0;T] :\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha_n(x)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{T} \alpha_n(x)\,dx = 0$$

Soit m l'unique entier relatif tel que :

$$a \leq m\,T < a + T$$

autrement dit tel que :

$$\frac{a}{T} \leq m < \frac{a}{T} + 1$$

Posons :

$$\forall\, x \in [a; m\,T] :\ \varphi_{1n}(x) = \varphi_n(x - (m-1)\,T), \qquad \alpha_{1n}(x) = \alpha_n(x - (m-1)\,T)$$

$$\forall\, x \in\,]m\,T; a + T] :\ \varphi_{1n}(x) = \varphi_n(x - m\ T), \qquad \alpha_{1n}(x) = \alpha_n(x - m\ T)$$

alors :

$$\forall\, x \in [a; m\,T] :\ |f(x) - \varphi_{1n}(x)| = |f(x - (m-1)\,T) - \varphi_n(x - (m-1)\,T)|$$

$$|f(x) - \varphi_{1n}(x)| \leq \alpha_n(x - (m-1)\,T) = \alpha_{1n}(x)$$

$$\forall\, x \in\,]m\,T; a + T] :\ |f(x) - \varphi_{1n}(x)| = |f(x - m\ T) - \varphi_n(x - m\ T)|$$

$$|f(x) - \varphi_{1n}(x)| \leq \alpha_n(x - m\ T) = \alpha_{1n}(x)$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^{a+T} \alpha_{1n}(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T \alpha_n(x)\, dx = 0$$

Donc f est intégrable au sens de Riemann sur $[a\,; a + T]$ et :

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^{a+T} \varphi_{1n}(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T \varphi_n(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$$