Inégalité de Young et inégalité de Hölder

1) Inégalité de Young

Commençons par un cas simple :

Soit x et y deux réels quelconques. Alors :

$$x\,y \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Cela est la conséquence du développement de $(x-y)^2$ lequel est positif ou nul.

Cette inégalité se généralise à deux réels x et y positifs ou nuls quelconques sous la forme suivante :

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in [\mathbf{0},+\infty[^{\mathbf{2}}, \forall\,(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \in [\mathbf{1},+\infty[^{\mathbf{2}} :\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1} \Rightarrow\ \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} \leq \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{q}}}{\boldsymbol{q}}$$

Avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{q}}$

Une autre version est :

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in [\mathbf{0},+\infty[^{\mathbf{2}}, \forall\,(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \in [\mathbf{1},+\infty[^{\mathbf{2}} :\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1} \Rightarrow\ \boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}}\,\boldsymbol{y}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}}} \leq \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{q}}$$

Avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Version qui s'interprète comme le fait que la moyenne géométrique pondérée de deux nombres positifs ou nuls est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique pondérée.

<u>Preuves :</u>

Introduisons pour $y \geq 0$ fixé, la fonction :

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x\,y$$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et :

$$f'(x) = x^{p-1} - \ y$$

Donc :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow\ x > y^{\frac{1}{p-1}}$$

f est donc strictement décroissante sur $\left[0, y^{\frac{1}{p-1}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[y^{\frac{1}{p-1}}, +\infty\right[$ donc présente un minimum en $y^{\frac{1}{p-1}}$. Ainsi :

$$\forall\,x \in [0,+\infty[\,:\ f(x) \geq\ f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

Notons que :

$$\frac{1}{p-1} = q - 1$$

Alors :

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = f(y^{q-1}) = \frac{y^{p\,(q-1)}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{q-1}\,y = \left(\frac{1}{q} - 1\right)\,y^q + \frac{y^q}{q} - y^q = 0$$

Ainsi :

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x\,y \geq 0$$

Soit :

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Et il y a égalité si et seulement si $x = y^{q-1}$ soit $x^p = y^q$.

La seconde version découle de la première

<u>2) Inégalité de Hölder</u>

Commençons par un cas simple :

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n −uplets de réels positifs ou nuls. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci est l'inégalité de Cauchy Schwarz associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Cette inégalité se généralise sous la forme :

$$\boldsymbol{\forall\ (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall\ (p, q) \in [1, +\infty[^2 :}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

<u>Preuve</u> :

Notons que si tous les x_i ou tous les y_i sont nuls, l'inégalité est triviale. Nous nous placerons donc dans l'autre cas. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p > 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} {y_i}^p > 0$$

Posons alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$a_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad b_i = \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Et appliquons l'inégalité de Young :

$$a_i\, b_i \leq \frac{{a_i}^p}{p} + \frac{{b_i}^q}{q}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} {a_i}^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} {b_i}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

Et finalement

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$