Deux variables indépendantes

<u>Enoncé</u> :

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y de loi conjointe définie pour tout couple d'entiers naturels (i ; j) tels que : 1 < i < j par :

$$\mathbf{P\big((X = i\ ) \cap (Y = j)\big) = a\ p^{j}}$$

Exprimer l'espérance et la variance de Y en fonction de celles de X.

Etudier l'indépendance des variables X et Y – X et

<u>Résolution</u> :

Nous allons résoudre ce problème en suivant le plan logique suivant :

- Formules pré-requises
- Tableau de la loi conjointe
- Loi marginale de X et valeur de a
- Loi marginale de Y
- Espérance et variance de X
- Espérance et variance de Y
- Loi conjointe de X et Z = Y-X ,loi de Z et analyse d'indépendance

C'est parti, en voiture s'il vous plaît !

I Formules pré-requises :

Commençons par la classique somme de termes d'une suite géométrique de raison x :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Limitons nous au cas utile pour notre problème : $0 < x < 1$. En faisant tendre n vers l'infini, nous en déduisons :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}}$$

Dérivons alors cette relation par rapport à x (en admettant qu'on peut le faire terme à terme dans la série de gauche) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}}$$

Recommençons le procédé deux fois :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\, x^{k-2} = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} k\,(k-1)\,(k-2)\, x^{k-3} = \frac{6}{(1 - x)^4}$$

Une autre relation utile est le reste de rang n de la série initiale :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} = \frac{x^n}{1 - x}}$$

Voilà, nous avons assez de bagages pour aller faire notre voyage de découverte dans notre problème.

II Tableau de loi conjointe :

X\Y	1	2	3	...	j	...	...
1		$a\,p^2$	$a\,p^3$	...	$a\,p^j$	...	...
2			$a\,p^3$	...	$\vdots$	...	...
$\vdots$				...	$\vdots$	...	...
i					$a\,p^j$	...	...
$\vdots$						...	...
$\vdots$							...
n							

Je ne saurais trop vous conseiller de bien repérer dans le tableau les cellules rouges dont les indices de ligne et de colonne sont égaux. Cela vous aidera à bien visualiser vos indices de début et de fin dans les sommations, comme nous allons le voir.

III Loi marginale de X et valeur de a :

Pour tous les entiers naturels $i > 0$, P(X=i) est la somme infinie des cellules de la ligne i (en bleu) soit :

$$\boxed{P(X=i) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} a\,p^j = a \sum_{j=i+1}^{+\infty} p^j = a\,\frac{p^{i+1}}{1-p}}$$

Ecrivons que la somme des probabilités des valeurs de X vaut 1, afin de déterminer a :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a \, \frac{p^{i+1}}{1-p} = 1$$

$$\frac{a\,p}{1-p} \sum_{i=1}^{+\infty} p^i = 1$$

$$\frac{a\,p}{1-p} \, \frac{p}{1-p} = 1$$

D'où :

$$\boxed{a = \frac{(1-p)^2}{p^2}}$$

Nous en déduisons :

$$P(X = i) = \frac{(1-p)^2}{p^2} \frac{p^{i+1}}{1-p}$$

Soit :

$$\boxed{P(X = i) = (1-p)\, p^{i-1}}$$

<u>**IV Loi marginale de Y**</u> :

Pour tous les entiers naturels $j > 1$, P(X=j) est la somme infinie des cellules de la colonne j soit :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} a\, p^j = \; a\, p^j\, (j-1) = (1-p)^2 p^{j-2} (j-1)$$

IV Espérance et variance de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\, P(X = i) = (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\, p^{i-1} = (1-p) \sum_{i=0}^{+\infty} i\, p^{i-1} = (1-p) \frac{1}{(1-p)^2}$$

Notez l'astuce qui consiste à ajouter l'indice 0 dans la somme.

Il vient alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{1-p}}$$

Voyons maintenant la variance en commençant par :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\, P(X = i) = (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\, p^{i-1}$$

Nous allons maintenant utiliser une autre astuce, notez là bien, ça simplifie grandement les calculs. Il s'agit d'écrire i sous forme $(i - 1 + 1)$

$$E(X^2) = (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\,(i-1+1)\, p^{i-1}$$

Puis de développer et écrire en deux sommes :

$$E(X^2) = (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\,(i-1)\, p^{i-1} + (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\, p^{i-1}$$

Il suffit alors de faire apparaître les sommes remarquables du pré-requis, en notant que dans la première, l'indice peut commencer à 2 :

$$E(X^2) = (1-p)\, p \sum_{i=2}^{+\infty} i\,(i-1)\, p^{i-2} + (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\, p^{i-1}$$

Il vient :

$$E(X^2) = (1-p)\, p\, \frac{2}{(1-p)^3} + (1-p) \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$E(X^2) = \frac{2\,p}{(1-p)^2} + \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{p+1}{(1-p)^2}$$

La variance s'en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{p+1}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2}$$

Finalement :

$$\boxed{V(X) = \frac{p}{(1-p)^2}}$$

V Espérance et variance de Y :

$$E(Y) = \sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(Y=j) = (1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j\,(j-1)\,p^{j-2} = (1-p)^2\,\frac{2}{(1-p)^3}$$

Finalement :

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{1-p} = 2\,E(X)}$$

Voyons la variance :

$$E(Y^2) = \sum_{j=2}^{+\infty} j^2\,P(Y=j) = (1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j^2\,(j-1)\,p^{j-2}$$

Rusons encore en écrivant : $j^2\,(j-1) = j\,(j-1)\,(j-2+2)$

$$E(Y^2) = (1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j\,(j-1)\,(j-2+2)\,p^{j-2}$$

Et développons et coupons la somme en deux :

$$E(Y^2) = (1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j\,(j-1)\,(j-2)\,p^{j-2} + 2\,(1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j\,(j-1)\,p^{j-2}$$

Faisons apparaître dans la première, une somme remarquable en notant que l'indice peut commencer à 3 :

$$E(Y^2) = p\,(1-p)^2 \sum_{j=3}^{+\infty} j\,(j-1)\,(j-2)\,p^{j-3} + 2\,(1-p)^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j\,(j-1)\,p^{j-2}$$

Il vient :

$$E(Y^2) = p\,(1-p)^2 \frac{6}{(1-p)^4} + 2\,(1-p)^2 \frac{2}{(1-p)^3}$$

$$E(Y^2) = \frac{6\,p}{(1-p)^2} + \frac{4\,(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{2\,p+4}{(1-p)^2}$$

Soit :

$$V(Y) = \frac{2\,p+4}{(1-p)^2} - \frac{4}{(1-p)^2}$$

Finalement :

$$\boxed{V(Y) = \frac{2\,p}{(1-p)^2} = 2\,V(X)}$$

<u>VI Loi conjointe de X et Z = Y-X ,loi de Z et analyse d'indépendance</u>

D'une part, pour tous entiers naturels non nuls i et k :

$$P\big((X=i) \cap (Y-X=k)\big) = P\big((X=i) \cap (Y=i+k)\big) = a\,p^{i+k}$$

Soit :

$$\boxed{P\big((X=i) \cap (Y-X=k)\big) = (1-p)^2 p^{i+k-2}}$$

D'autre part' d'après le théorème des probabilités totales :

$$P(Y-X=k)=\sum_{i=1}^{+\infty} P\big((X=i\,)\cap(Y-X=k)\big)=\sum_{i=1}^{+\infty} a\,p^{i+k}$$

$$=(1-p)^2\sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+k-2}$$

$$=(1-p)^2p^{k-2}\sum_{i=1}^{+\infty} p^{i}$$

$$=(1-p)^2p^{k-2}\,\frac{p}{1-p}$$

Soit :

$$\boxed{P(Y-X=k)=(1-p)\,p^{k-1}}$$

Nous en déduisons :

$$P(X=i)\,P(Y-X=k)=(1-p)\,p^{i-1}(1-p)\,p^{k-1}$$

Soit :

$$\boxed{P(X=i)\times\ P(Y-X=k)=(1-p)^2\,p^{i+k-2}}$$

Nous constatons donc :

$$\boxed{P\big((X=i\,)\cap(Y-X=k)\big)=P(X=i)\times\ P(Y-X=k)}$$

Les variables X et Y – X sont donc indépendantes