Grandeurs complexes utilisées en mécanique et en électricité

En électricité et en mécanique, on se trouve dans de nombreux cas en présence d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants à résoudre, dans le but de déterminer un régime d'oscillations libres ou bien un régime d'oscillations forcées. Afin de faciliter la résolution dans le cas des oscillations forcées à une fréquence donnée, on est amené à définir des grandeurs complexes pour chaque grandeur dépendant du temps, telle que tension ou intensité en électricité et force et déplacement en mécanique. L'intérêt de l'étude des oscillations forcées à une fréquence quelconque donnée est de permettre de déterminer la solution pour n'importe quel régime, y compris transitoire, grâce à la transformée de Fourier permettant de transformer n'importe quel signal temporel en somme de signaux sinusoïdaux.

I **Introduction par un exemple**

Soit à résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable t suivante :

$$y'' + 3\,y' - 2\,y = cos(\omega\,t)$$

Commençons par la résoudre de façon classique :

a) On résout d'abord l'équation homogène associée :

$$y'' + 3\,y' - 2\,y = 0$$

Dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3\,r + 2 = 0$$

qui se factorise en :

$$(r+1)\,(r+2) = 0$$

donc de racines :

$$r_1 = -1, \qquad r_2 = -2$$

Une base de solutions est donc le couple de fonctions :

$$(e^{-t}, e^{-2\,t})$$

Et la solution générale de l'équation homogène est :

$$y = A\,e^{-t} + \;B\,e^{-2\,t}$$

où (A, B) est un couple quelconque de constantes réelles.

b) On cherche ensuite une solution particulière de la forme y_P telle que :

$$y_P \in Vect\left[cos(\omega\, t), \left(cos(\omega\, t)\right)', \left(cos(\omega\, t)\right)''\right]$$

Or :

$$Vect\left[cos(\omega\, t), \left(cos(\omega\, t)\right)', \left(cos(\omega\, t)\right)''\right] = Vect[cos(\omega\, t), -\omega\, sin(\omega\, t), -\omega^2\, cos(\omega\, t)]$$

$$= Vect[cos(\omega\, t), sin(\omega\, t)]$$

On cherche donc la solution particulière sous forme :

$$y_P = C\, cos(\omega\, t) + D\, sin(\omega\, t)$$

Ainsi :

$$y_P' = -C\, \omega\, sin(\omega\, t) + D\, \omega\, cos(\omega\, t)$$

$$y_P'' = -C\, \omega^2\, cos(\omega\, t) - D\, \omega^2\, sin(\omega\, t)$$

Soit :

$$y_P'' + 3\, y_P' + 2\, y_P = (-C\, \omega^2 + 3\, D\, \omega + 2\, C)\, cos(\omega\, t) + (-D\, \omega^2 - 3\, C\, \omega + 2\, D)\, sin(\omega\, t)$$

Afin que y_P soit solution, il faut et il suffit que le couple (C, D) vérifie le système :

$$\begin{cases} -C\, \omega^2 + 3\, D\, \omega + 2\, C = 1 \\ -D\, \omega^2 - 3\, C\, \omega + 2\, D = 0 \end{cases}$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} (2-\omega^2) & 3\, \omega \\ -3\, \omega & (2-\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-\omega^2)^2 + 9\, \omega^2} \begin{pmatrix} (2-\omega^2) & -3\, \omega \\ 3\, \omega & (2-\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-\omega^2)^2 + 9\, \omega^2} \begin{pmatrix} 2-\omega^2 \\ 3\, \omega \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$y_P = \frac{1}{(2-\omega^2)^2 + 9\, \omega^2} \left((2-\omega^2)\, cos(\omega\, t) + 3\, \omega\, sin(\omega\, t)\right)$$

Afin de la rendre plus explicite : on note qu'une expression générale de la forme :

$$a\, cos(\omega\, t) + b\, sin(\omega\, t)$$

peut se transformer en posant :

$$\begin{cases} a = r\, cos(\varphi) \\ b = -r\, sin(\varphi) \end{cases}$$

en :

$$r\,cos(\varphi)\,cos(\omega\,t) - r\,sin(\varphi)\,sin(\omega\,t) = r\,cos(\omega\,t + \varphi)$$

Cela revient encore à poser :

$$a - i\,b = r\,e^{i\,\varphi}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tan(\varphi) = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Appliqué à y_P cela donne :

$$\begin{cases} r = \sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2} \\ tan(\varphi) = \dfrac{-3\,\omega}{2-\omega^2} \end{cases}$$

Et :

$$y_P = \frac{1}{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}\,\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}\,cos(\omega\,t + \varphi) =$$

Soit finalement :

$$\boxed{y_P = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}}\,cos(\omega\,t + \varphi)}$$

La solution générale à l'équation différentielle complète est alors :

$$\boxed{y = A\,e^{-t} + B\,e^{-2\,t} + \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}}\,cos(\omega\,t + \varphi)}$$

Plaçons nous alors dans le cadre de la physique, où t est le temps. La partie de la solution qui est celle de l'équation homogène associée présente des termes en $e^{-k\,t}, k > 0$ qui tendent rapidement vers 0 quand le temps tend vers l'infini. Un oscilloscope permettrait de vérifier qu'en fermant un circuit électrique dans lequel figure un générateur délivrant une tension sinusoïdale, la tension mesurée aux bornes de n'importe quel dipôle devient sinusoïdale de même fréquence que celle du générateur quasi instantanément. Autrement dit, un régime permanent s'installe et c'est la solution particulière y_P qui décrit ce régime permanent. On ne s'intéresse donc tout naturellement qu'à cette dernière.

La méthode que nous venons d'employer pour obtenir la solution y_P de régime permanent est laborieuse. Nous allons voir qu'il est possible de la simplifier considérablement par le procédé qui suit :

Notons en premier lieu que le second membre est la partie réelle du complexe $e^{i\,\omega\,t}$. De ce fait, on introduit une autre équation, appelée équation complexe associée qui est :

$$\overline{y}'' + 3\,\overline{y}' + 2\,\overline{y} = e^{i\,\omega\,t}$$

Cette équation porte sur une fonction complexe $\overline{y}$ de la variable réelle. On note alors que si $\overline{y}$ est solution de l'équation complexe, alors sa partie réelle y est solution de l'équation réelle associée. En effet, en prenant la partie réelle de l'équation complexe, on a :

$$Re\left(\overline{y}'' + 3\,\overline{y}' + 2\,\overline{y}\right) = Re\left(e^{i\,\omega\,t}\right)$$

Soit, par linéarité de la partie réelle :

$$Re(\overline{y}'') + 3\,Re(\overline{y}') - 2\,Re(\overline{y}) = Re\left(e^{i\,\omega\,t}\right)$$

Puis :

$$\left(Re(\overline{y})\right)'' + 3\left(Re(\overline{y})\right)'' + 2\,Re(\overline{y}) = cos(\omega\,t)$$

Il suffit donc de trouver une solution particulière $\overline{y}_P$ à l'équation complexe pour obtenir, par la partie réelle, une solution particulière y_P à l'équation réelle associée.

Or $\overline{y}_P$ se cherche sous forme :

$$\overline{y}_P = \overline{Y}\,e^{i\,\omega\,t}$$

où $\overline{Y}$ est une constante complexe qu'on peut mettre sous forme exponentielle :

$$\overline{Y} = \hat{Y}\,e^{i\,\varphi}$$

Ainsi :

$$\left(\overline{y}_P\right)' = i\,\omega\,\overline{Y}\,e^{i\,\omega\,t}$$

$$\left(\overline{y}_P\right)'' = -\omega^2\,\overline{Y}\,e^{i\,\omega\,t}$$

Soit :

$$\left(\overline{y}_P\right)'' + 3\left(\overline{y}_P\right)' + 2\,\overline{y}_P = \left(-\omega^2\,\overline{Y} + 3\,i\,\omega\,\overline{Y} + 2\,\overline{Y}\right)e^{i\,\omega\,t}$$

On en déduit par identification :

$$(2 - \omega^2 + 3\,i\,\omega)\overline{Y} = 1$$

Soit :

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{2 - \omega^2 + 3\,i\,\omega}}$$

Déterminons en le module $\hat{Y}$ et un argument φ :

$$\begin{cases} \hat{Y} = \dfrac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}} \\ \varphi = arg\left(\overline{Y}\right) = -arg(2 - \omega^2 + 3\,i\,\omega) \end{cases}$$

Ainsi

$$\overline{y}_P = \hat{Y}\,e^{i\,\varphi}\,e^{i\,\omega\,t} = \hat{Y}\;\;e^{i\,(\omega\,t+\varphi)}$$

Et la solution particulière y_P de l'équation réelle est :

$$\boxed{y_P = \hat{Y}\,cos(\omega\,t + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 9\,\omega^2}}\,cos(\omega\,t + \varphi)}$$

On retrouve bien la même expression qu'avec le premier procédé mais dans une démarche bien plus économique. C'est le fondement même de l'utilisation des grandeurs complexes et des notions d'impédances qu'ils leurs sont rattachées.

II Un théorème mathématique

Soit une équation différentielle linéaire (ER) à coefficients réels constants que nous qualifierons d'équation réelle, portant sur une fonction réelle de la variable réelle $y(t)$:

$$y'' + b\,y' + c\,y = cos(\omega\,t) \qquad (ER)$$

On définit une équation (EC) qualifiée d'équation complexe associée, portant sur une fonction complexe de la variable réelle $\overline{y}(t)$: :

$$\overline{y}'' + b\,\overline{y}' + c\,\overline{y} = e^{i\,\omega\,t} \qquad (EC)$$

Alors :

$\boldsymbol{y}$ **solution de** $(\boldsymbol{ER}) \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y}$ **partie réelle d'unesolution** $\boldsymbol{\overline{y}\ de}\ (\boldsymbol{EC})$
Les solutions de l'équation réelle sont donc les parties réelles des solutions de l'équation complexe associée.

Preuve :

$(\Rightarrow)$ Soit y une solution de (ER) alors :

$$\forall\,t \in \mathbb{R} :\; y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = cos(\omega\,t)$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$y''(t) = -b\,y'(t) - c\,y(t) + cos(\omega\,t)$$

Cela prouve que la fonction y'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ y'''(t) + b\, y''(t) + c\, y'(t) = -\omega\, sin(\omega\, t)$$

Donc , en multipliant par $-\frac{i}{\omega}$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ -\frac{i}{\omega}\, y'''(t) - \frac{i}{\omega} b\, y''(t) - \frac{i}{\omega} c\, y'(t) = i\ \ sin(\omega\, t)$$

Soit :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ \left(-\frac{i}{\omega} y'(t)\right)'' + b\left(-\frac{i}{\omega}\, y'(t)\right)' + c\left(-\frac{i}{\omega} y'(t)\right) = i\ \ sin(\omega\, t)$$

Puis en ajoutant à l'équation initiale :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ \left(y(t) - \frac{i}{\omega} y'(t)\right)'' + b\left(y(t) - \frac{i}{\omega}\, y'(t)\right)' + c\left(y(t) - \frac{i}{\omega} y'(t)\right) = i\ \ sin(\omega\, t)$$

Posons alors :

$$\overline{y}(t) = y(t) - \frac{i}{\omega} y'(t)$$

La fonction $\overline{y}$ est solution de l'équation complexe et la fonction y en est la partie réelle

$(\Leftarrow)$ Soit $\overline{y}$ une solution de (EC) alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ \overline{y}''(t) + b\,\overline{y}'(t) + c\,\overline{y}(t) = cos(\omega\, t)$$

En prenant la partie réelle des deux membres :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ Re(y(t))'' + b\, Re(y(t))' + c\, Re(y(t)) = cos(\omega\, t)$$

La fonction $y = Re(\overline{y})$ est donc solution de l'équation réelle

III Grandeurs complexes associées à des signaux sinusoïdaux

1) Définition :

Un signal sinusoïdal est une fonction du temps t de la forme :

$$s(t) = \hat{S}\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

$\hat{S}$, qui est positive, est appelée **amplitude du signal** et φ **phase à l'origine**. ω est la **pulsation du signal**. Elle est reliée à sa période T et à sa fréquence f par les relations :

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\, f$$

2) Signal complexe associé

A un signal $s(t)$, on associe un signal complexe $\overline{s}(t)$ tel que $s(t)$ en soit la partie réelle, défini par :

$$\overline{s}(t) = \hat{S}\ e^{i\,(\omega\, t + \varphi)} = \hat{S}\ e^{i\,\varphi}\, e^{i\,\omega\, t}$$

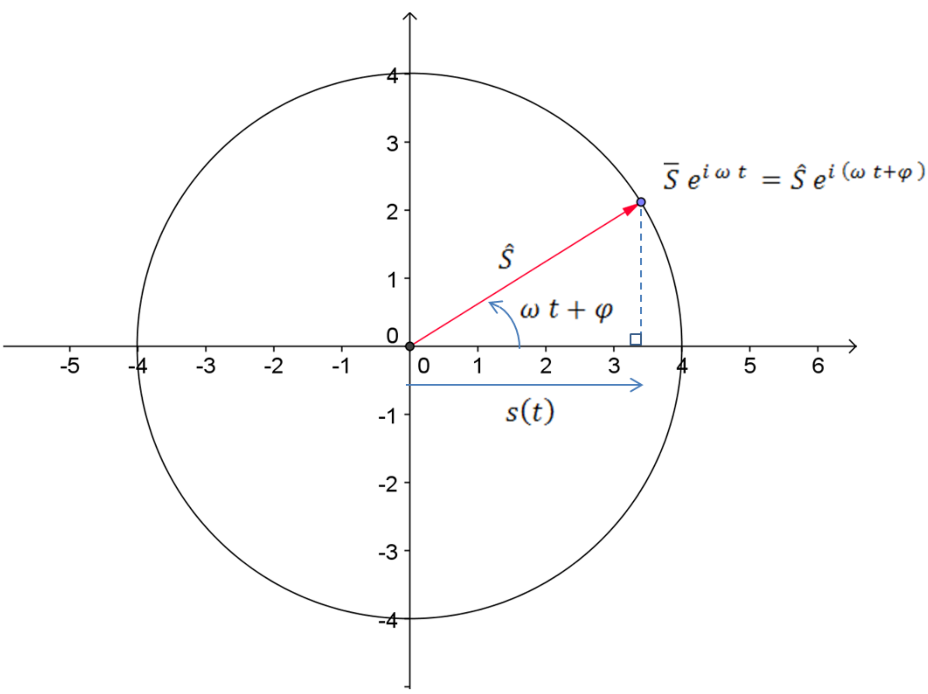
Et on appelle **grandeur complexe associée au signal $s(t)$** le nombre complexe :

$$\overline{S} = \hat{S}\ e^{i\,\varphi}$$

Ainsi :

$$s(t) = Re\left(\overline{S}\, e^{i\,\omega\, t}\right)$$

Un signal peut se représenter à l'aide d'un vecteur tournant dans le sens trigonométrique, c'est la **représentation de Fresnel** :



3) **Propriétés** :

a) Linéarité : grandeur complexe associée à une combinaison linéaire de signaux

Soit (a, b) un couple de réels et deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de même pulsation

$$\boldsymbol{s_1(t) = \widehat{S_1}\, cos(\omega\, t + \varphi_1)}$$

$$\boldsymbol{s_2(t) = \widehat{S_2}\, cos(\omega\, t + \varphi_2)}$$

associés respectivement aux grandeurs complexes $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$, et soit le signal $s(t)$ combinaison linéaire des deux précédents :

$$\boldsymbol{s(t) = a\, s_1(t) + b\, s_2(t)}$$

alors, $s(t)$ est un signal sinusoïdal de même pulsation que $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et associé à la grandeur complexe $a\,\overline{S_1} + b\,\overline{S_2}$

Preuve :

$$s(t) = a\, Re\left(\overline{S_1}\, e^{i\,\omega\, t}\right) + b\, Re\left(\overline{S_2}\, e^{i\,\omega\, t}\right)$$

$$= Re\left(\left(a\,\overline{S_1} + b\,\overline{S_2}\right)\ e^{i\,\omega\, t}\right)$$

Soit en mettant sous forme exponentielle :

$$a\,\overline{S_1} + b\,\overline{S_2} = \hat{S}\ e^{i\,\varphi}$$

$$s(t) = Re\left(\hat{S}\ e^{i\,\varphi}\ e^{i\,\omega\, t}\right) = Re\left(\hat{S}\ e^{i\,(\omega\, t+\varphi)}\right) = \hat{S}\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

Donc $s(t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation ω de grandeur complexe associée :

$$\overline{S} = \hat{S}\ e^{i\,\varphi} = a\,\overline{S_1} + b\,\overline{S_2}$$

Remarque :

Ce théorème sera utile dans l'application de la loi d'additivité des tensions ou bien la loi des nœuds en électricité et dans l'application du principe fondamental de la dynamique où intervient la somme des forces en mécanique.

b) Propriétés vis-à-vis de la dérivation

Soit $s(t)$ un signal

$$\boldsymbol{s(t) = \widehat{S}\, cos(\omega\, t + \varphi)}$$

de grandeur complexe donc :

$$\boldsymbol{\overline{S} = \widehat{S}\ e^{i\,\varphi}}$$

alors, le signal dérivée $s'(t)$ est un signal sinusoïdal de même pulsation que $s(t)$ et associé à la grandeur complexe $i\,\omega\ \overline{S}$

En particulier, le signal dérivée seconde $s''(t)$ est un signal sinusoïdal de même pulsation que $s(t)$ et associé à la grandeur complexe $-\omega^2\ \overline{S}$

Preuve :

$$s(t) = \hat{S}\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

$$s'(t) = -\omega\, \hat{S}\, sin(\omega\, t + \varphi) = \omega\, \hat{S}\, cos\left(\omega\, t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s'(t) == -\omega^2\, \hat{S}\, cos(\omega\, t + \varphi)$$

La grandeur complexe associée à $s'(t)$ est donc :

$$\omega\, \hat{S}\, e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = i\,\omega\, \hat{S}\, e^{i\,\varphi} = i\,\omega\, \overline{S}$$

Et la grandeur complexe associée à $s''(t)$ est :

$$-\omega^2\, \hat{S}\, e^{i\,\varphi} = -\omega^2\, \overline{S}$$

IV Application aux régimes sinusoïdaux forcés en électricité et en mécanique

1) **Circuits électriques linéaires** :

a) Notion d'impédance complexe

On se place dans le cas d'un circuit électrique formé d'un assemblage de conducteurs ou de générateurs dont les relations tension-intensité sont de la forme

$$u(t) = a\, i(t) + b\, \frac{di(t)}{dt} + c\, \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + s(t)$$

ou

$$i(t) = a\, i(t) + b\, \frac{du(t)}{dt} + c\, \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + s(t)$$

où $s(t)$ est un signal sinusoïdal de pulsation ω qui doit être la même pour tous les éléments du circuits qui sont concernés (les générateurs généralement)

Dans ce cas, en vertu des propriétés énoncées précédemment, toutes les grandeurs d'intensité et de tension du circuit sont des signaux sinusoïdaux de même pulsation auxquels sont associées des grandeurs complexes permettant, via l'équation différentielle régissant l'évolution des grandeurs du circuit, de les déterminer aisément.

Cela passe par l'établissement de relations entre grandeurs complexes d'intensité et de tension pour ces différents dipôles que l'on l'exprime sous forme :

$$\boldsymbol{\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I}}$$

où

$$\boldsymbol{\overline{U} = \hat{U}\, e^{i\,\varphi_u}, \qquad \overline{I} = \hat{I}\, e^{i\,\varphi_I}\,, \overline{Z} = \hat{Z}\, e^{i\,\varphi_Z}}$$

$\overline{Z}$ est qualifiée d'impédance complexe

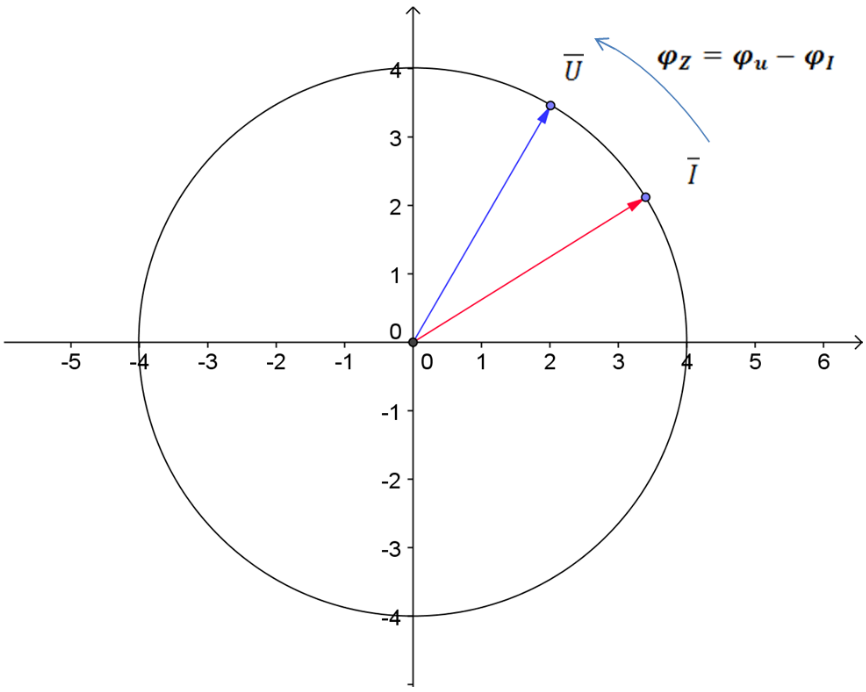
$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_I$ représente le déphasage entre l'intensité traversant le dipôle et la tension à ses bornes

Le module de l'impédance complexe $|\overline{Z}|$ représente quant à lui le rapport de l'amplitude la tension à celle de l'intensité :

$$|\overline{Z}| = \frac{\boldsymbol{\hat{U}}}{\boldsymbol{\hat{I}}}$$

Remarque : La relation tension intensité établie entre les grandeurs complexes s'apparente à la loi d'Ohm, ce qui fait que toutes les propriétés établies pour les circuits électriques en régime continu resteront valables avec les grandeurs complexes (loi des nœuds, loi d'additivité des tensions, théorème de superposition, théorème de Thévenin, théorème de Norton)

Le déphasage entre l'intensité et la tension s'interprète en termes d'angle dans la représentation de Fresnel :



b) **Impédance complexe de dipôles courants**

Considérons les dipôles les plus couramment rencontrés en électronique : les résistors, les inductances et les condensateurs :

- **Résistor** :

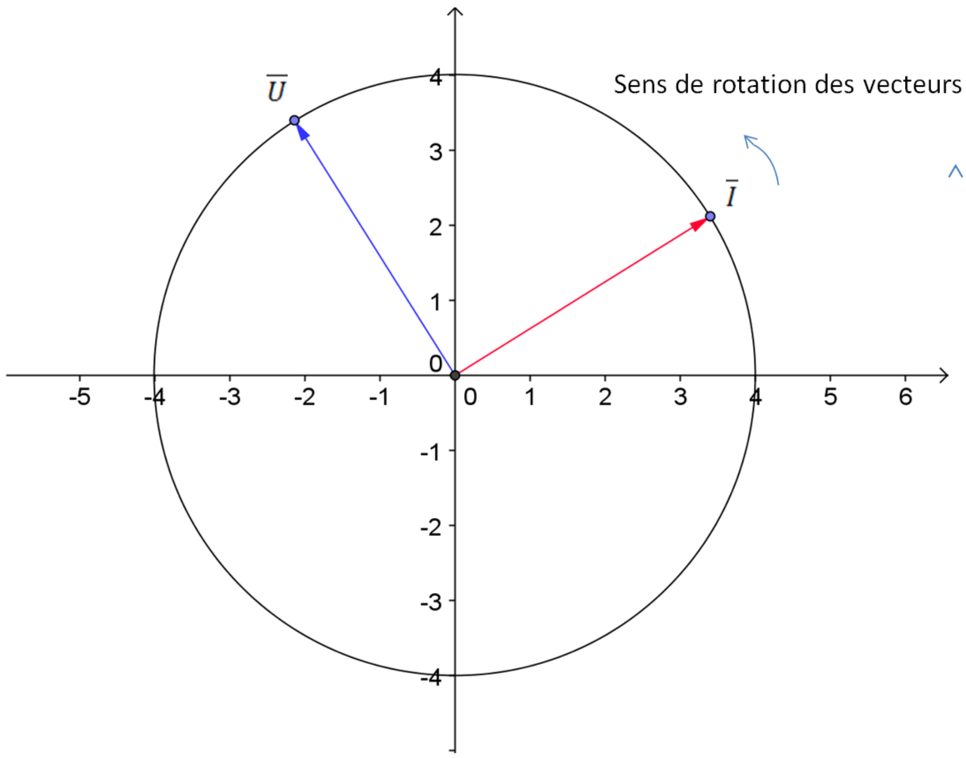
$$u(t) = R\,i(t) \Rightarrow \overline{U} = R\,\overline{I} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z} = R \\ \dfrac{\widehat{U}}{\widehat{I}} = R \\ \varphi_u - \varphi_I = 0 \end{cases}$$

Les signaux de tension et d'intensité aux bornes d'un résistor sont en phase

- **Inductance (idéale)** :

$$u(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \overline{U} = j\,L\,\omega\,\overline{I} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z} = j\,L\,\omega \\ \dfrac{\widehat{U}}{\widehat{I}} = L\,\omega \\ \varphi_u - \varphi_I = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les signaux de tension et d'intensité aux bornes d'un résistor sont en quadrature, avec l'intensité en retard sur la tension comme le suggère la représentation de Fresnel ci-dessous :



- **Condensateur** :

$$i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \bar{I} = j\,C\,\omega\,\bar{U} \Rightarrow \begin{cases} \bar{Z} = \dfrac{1}{j\,C\,\omega} \\ \dfrac{\widehat{U}}{\widehat{I}} = \dfrac{1}{C\,\omega} \\ \varphi_u - \varphi_I = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les signaux de tension et d'intensité aux bornes d'un résistor sont en quadrature, avec la tension en retard sur l'intensité comme le suggère la représentation de Fresnel ci-dessous :