Une grenouille montant des marches

Problème à résoudre :

Soit une grenouille qui souhaite se rendre en haut d'un escalier à sept marches. La pauvre s'étant empiffrée la veille, s'en trouve malheureusement aujourd'hui fort dodue, et ne peut monter l'escalier que par sauts d'une marche ou de deux marches, sans que l'on puisse prévoir le type de saut suivant le précédent. De combien de façons peut elle le faire ?

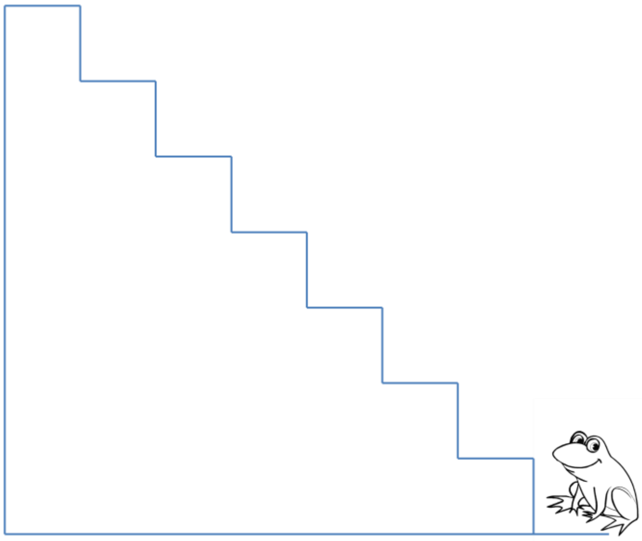
En supposant que ses différentes façons de monter l'escalier sont équiprobables, quelle est la probabilité qu'elle saute par-dessus la sixième marche donc sans poser ses pattes sur le haut de cette dernière.

Ouille, ouille, ouille, ça paraît ben compliqué à première vue, comment va-t-on détricoter tout ça ?

En suivant les étapes, dessiner, considérer, numéroter et modéliser et enfin résoudre

Dessiner :

J'espère que vous savez dessiner un escalier. Moi oui. Euh ! Pour la grenouille, j'avoue, c'est pas moi !



<u>Considérer</u> :

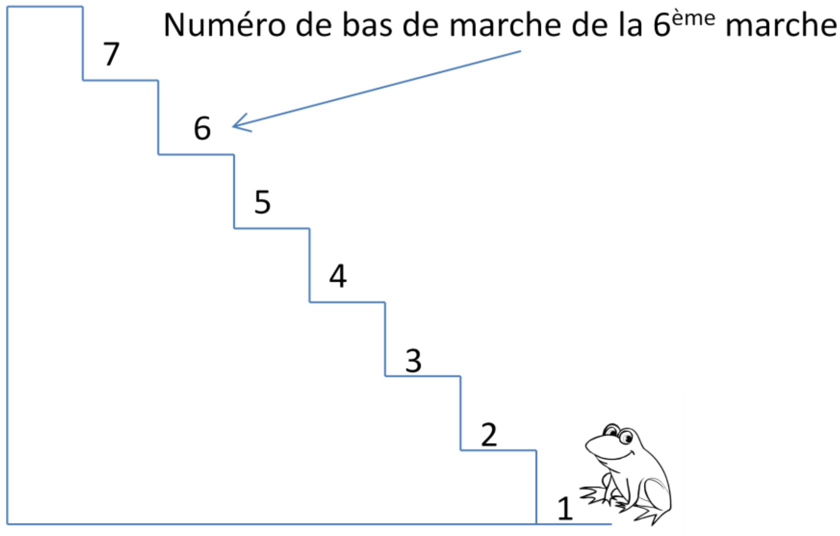
C'est la chose la plus importante, c'est généralement là qu'on patauge, donc rassurez vous si vous ne trouvez pas du premier coup.

Une marche est en effet caractérisée par deux choses, pour ce qui est de notre problème, un bas de marche et un haut de marche. Alors lequel considérer ? C'est par tâtonnement qu'on trouve et je vous propose le bas de marche car c'est quand même de là que part la grenouille

<u>Numéroter</u> :

Puisqu'il y a sept marches, il y a donc sept bas de marche (et sept hauts de marche, cela va de soi)

Numérotons donc les bas de marche de 1 à 7.



Modéliser

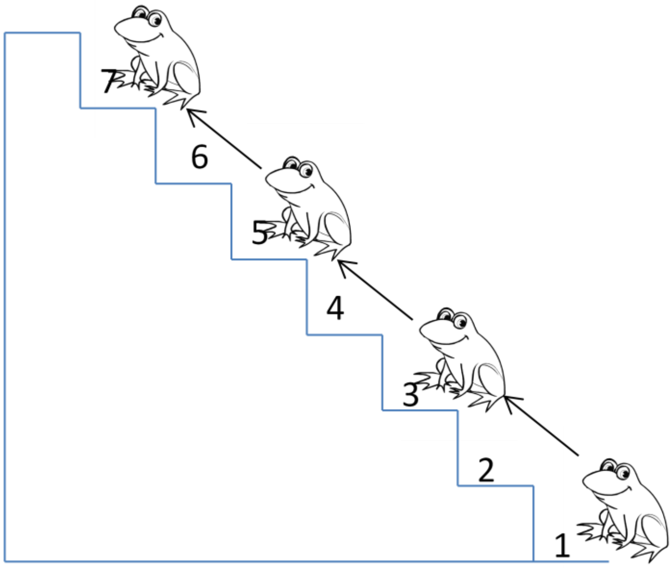
La montée de la grenouille en haut de l'escalier est une épreuve (au sens des probabilités) qui peut être définie par la donnée des numéros des bas de marche par lesquels elle est passée.

L'épreuve consistant à passer par chaque bas de marche est ainsi représentée par le chemin :

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$$

L'épreuve consistant à sauter les marches deux par deux sauf la dernière, pour laquelle ce ne serait pas possible, est :

$$1 \to 3 \to 5 \to 7$$



Cette modélisation sous forme de chemins n'est cependant pas très pratique. En effet, y figurera toujours 1.

Il est plus intéressant de caractériser une épreuve par les bas de marche sur lesquels la grenouille a fait un saut de deux.

Ainsi pour le premier exemple, il n'y en a pas. Pour le second, il y en a trois, qui sont : 1 ; 3 ; 5 mais pas 7, car arrivé au bas de marche de numéro 7, la grenouille n'a plus qu'un saut à effectuer pour sauter la dernière marche.

Une épreuve est donc associée au sous ensemble de l'ensemble des entiers naturels de 1 à 7 noté $[\![1\,;\,7]\!]$ formé par les numéros de bas de marche sur lesquels la grenouille a fait un saut de deux.

Voyons quelques exemples pour nous familiariser avec cette modélisation :

Bas de marche empruntés	Bas de marche à saut de 2
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$	$\{\,\}$
$1 \to 3 \to 5 \to 7$	$\{1\,;3\,;5\}$
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$	$\{1\}$
$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7$	$\{3\,;5\}$
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$	$\{6\}$

Notre problème se ramène donc à la détermination de tous les sous ensembles de $[\![1 ; 6]\!]$ n'ayant pas deux entiers consécutifs.

Résoudre

Notons, pour un entier naturel n non nul, P_n l'ensemble des sous ensembles de $[\![1 ; n]\!]$ n'ayant pas deux entiers consécutifs et $U_n = \mathrm{Card}(P_n)$ leur nombre.

Commençons par déterminer les premiers termes.

Eléments de P_1 : { } ; {1}

$$\boxed{U_1 = \mathrm{Card}(P_1) = 2}$$

Eléments de P_2 : { } ; {1} ; {2}

$$\boxed{U_2 = \mathrm{Card}(P_2) = 3}$$

Pour nous familiariser avec ces suites, déterminons P_6.

Eléments de P_6 :

{ }

{1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5} ; {6}

{1 ; 3} ; {1 ; 4} ; {1 ; 5} ; {1 ; 6} ; {2 ; 4} ; {2 ; 5} ; {2 ; 6} ; {3 ; 5} ; {3 ; 6}; {4 ; 6}

{1 ; 3 ; 5} ; {1 ; 3 ; 6} ; {1 ; 4 ; 6} ; {2 ; 4 ; 6}

Toute l'astuce consiste à séparer ces éléments en deux groupes, un groupe, où ne figure pas le 6, et un autre où il figure.

Groupe d'éléments où ne figure pas le 6 :

{ }

{1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5}

$\{1 ; 3\}$; $\{1 ; 4\}$; $\{1 ; 5\}$; $\{2 ; 4\}$; $\{2 ; 5\}$; $\{3 ; 5\}$

$\{1 ; 3 ; 5\}$;

Nous constatons qu'il s'agit ni plus ni moins des éléments de P_5

<u>Groupe d'éléments où figure le 6</u>

$\{6\}$

$\{1 ; 6\}$; $\{2 ; 6\}$; $\{3 ; 6\}$; $\{4 ; 6\}$

$\{1 ; 3 ; 6\}$; $\{1 ; 4 ; 6\}$; $\{2 ; 4 ; 6\}$

Dans ce groupe, il y a autant d'éléments que dans le groupe suivant, où le 6 a été omis dans chaque sous ensemble :

$\{ \}$

$\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$

$\{1 ; 3\}$; $\{1 ; 4\}$; $\{2 ; 4\}$

Or les éléments de ce dernier groupe ne sont rien d'autre que ceux de P_4. Nous en déduisons aisément :

$$\boxed{U_6 = U_5 + U_4}$$

Pour ceux, dont je fais partie, qui adorent les abstractions mathématiques, mais j'éprouve de la compassion pour mes élèves et évite de la faire si c'est possible, je sors la grosse artillerie, en précisant que c'est le niveau de langage auquel un étudiant devrait accéder.

La séparation en deux groupes que nous avons vue précédemment peut en effet s'écrire de façon plus concise dans le langage mathématique sous la forme :

$$P_6 = P_5 + \{A \cup \{6\} : A \in P_4\}$$

Je me comprends, j'espère que certains d'entre vous, oui, mais Dédé il peut passer (voir ma revue Sciences et rigolade) Et donc :

$$\mathrm{card}(P_6) = \mathrm{card}(P_5) + \mathrm{card}\{A \cup \{6\} : A \in P_4\}$$

Or $\{A \cup \{6\} : A \in P_4\}$ est en bijection avec P_4 donc :

$$\mathrm{card}\{A \cup \{6\} : A \in P_4\} = \mathrm{card}(P_4)$$

D'où le résultat :

$$\mathrm{card}(P_6) = \mathrm{card}(P_5) + \mathrm{card}(P_4)$$

Eh oui ça surprend au début, c'est comme les impôts, mais après on s'y habitue (euh….. !)

Alors, regardez moi bien, non plutôt ce qui est au dessus. Remplacer 6 par n, 5 par (n-1) et 4 par (n-2), vous aurez la remarquable relation pour n supérieur ou égal à 3 :

$$\boxed{U_n = U_{n-1} + U_{n-2}}$$

Et là c'est du gâteau !

Tout le monde (des mathématiciens en herbe ou chevronnés) aura reconnu une suite de Fibonacci, dont l'expression explicite est facile à obtenir, mais comme nous cherchons le sixième terme, nous nous contenterons de le faire de proche en proche :

$$U_1 = 2$$

$$U_2 = 3$$

$$U_3 = U_2 + U_1 = 5$$

$$U_4 = U_3 + U_2 = 8$$

$$U_5 = U_4 + U_3 = 13$$

$$U_6 = U_5 + U_4 = 21$$

Et voilà, notre grenouille peut exécuter sa montée d'escaliers de 21 façons équiprobables possibles.

Pour répondre à la seconde question, il faut regarder quelles épreuves font sauter la sixième marche, c'est-à-dire produisant au bas de marche de numéro 6 un saut de deux marches. Cela revient donc à déterminer dans P_6 les éléments, où figure le 6. Or nous l'avons déjà fait, puisqu'il y en a le même nombre que dans P_4 à savoir 8.

La probabilité cherchée est donc 8/21.

Reste cependant un point qui n'aura pas échappé aux puristes dont je fais partie. Le résultat serait il le même si au lieu de considérer les différentes façons de monter l'escalier équiprobables, on considérait simplement que, parvenu à un palier de marche donné, la grenouille a la même probabilité de faire un saut d'une marche et de faire un saut de deux marches, sauf si elle est au septième palier pour lequel elle n'a plus que le choix d'un saut d'une marche.

J'attends vos réponses par mail…

Et voilà, à bientôt pour d'autres exercices aussi passionnants….