

Les gammes musicales

I Principes de base de l'harmonie musicale

a) L'intervalle musical

L'oreille est sensible au rapport de fréquences (fondamentales) de deux sons joués de façon consécutives. Ainsi, si on joue les 3 notes consécutives Ré Mi Fa des touches d'un piano puis celles immédiatement après La Si Do (octave), l'impression sonore produite par la deuxième séquence de notes semblera être la même que celle produite par la première séquence mais à une tonalité plus élevée.

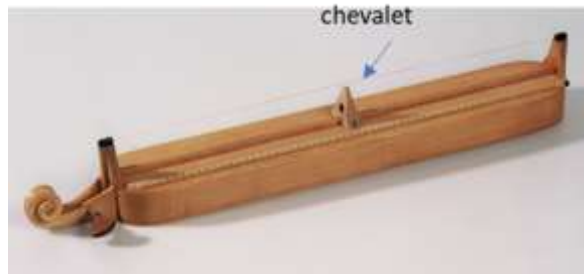
En examinant les fréquences concernées, nous avons en adoptant les notations

$$\text{Ré}(f_1) \text{ Mi}(f_2) \text{ Fa}(f_3) \text{ La}(f'_1) \text{ Si}(f'_2) \text{ Do}(f'_3)$$

$$\frac{f'_2}{f_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \frac{f'_3}{f_2} = \frac{f_3}{f_2}$$

b) Les intervalles consonnant : L'octave, la quinte, la quarte

Dès l'antiquité, des hommes comme Pythagore avaient découverts les bases de l'harmonie musicale, en constatant, à l'aide d'un dispositif appelé monocorde, dans lequel une corde était mise sous tension entre deux points et la longueur de la partie vibrante de cette corde pouvait être ajustée à l'aide d'un chevalet mobile, qu'on obtenait, pour certaines longueurs de corde bien particulières, un son très en harmonie avec le son produit par la corde vibrant sur toute sa longueur.



Monocorde employé par Pythagore

Les deux sons, joués à la suite l'un de l'autre, étaient qualifiés de **consonnant**. Les longueurs de corde qui donnaient des sons consonnant avec la corde entière de longueur L étaient

- la moitié de L , la fréquence du son étant alors égale au double (**) de la fréquence du son de la corde à vide, et l'intervalle formé étant qualifié d'**octave**,
- les deux tiers de L , la fréquence du son étant alors égale aux trois demis de la fréquence du son de la corde à vide, et l'intervalle formé étant qualifié de **quinte**,
- les trois quarts de L , la fréquence du son étant alors égale aux quatre tiers de la fréquence du son de la corde à vide, et l'intervalle formé étant qualifié de **quarte**.

(**) Rappelons que pour une tension de corde donnée, la fréquence fondamentale de vibration d'une corde est inversement proportionnelle à sa longueur ce qui fait qu'en multipliant la longueur de la corde par une fraction donnée, cette fréquence est multipliée par la fraction inverse.

Les dénominations de quarte et de quinte se justifieront dans la construction de la gamme à 7 notes opérée par Pythagore et dans laquelle la quarte est la quatrième note et la quinte la cinquième note.

II Les gammes de Pythagore

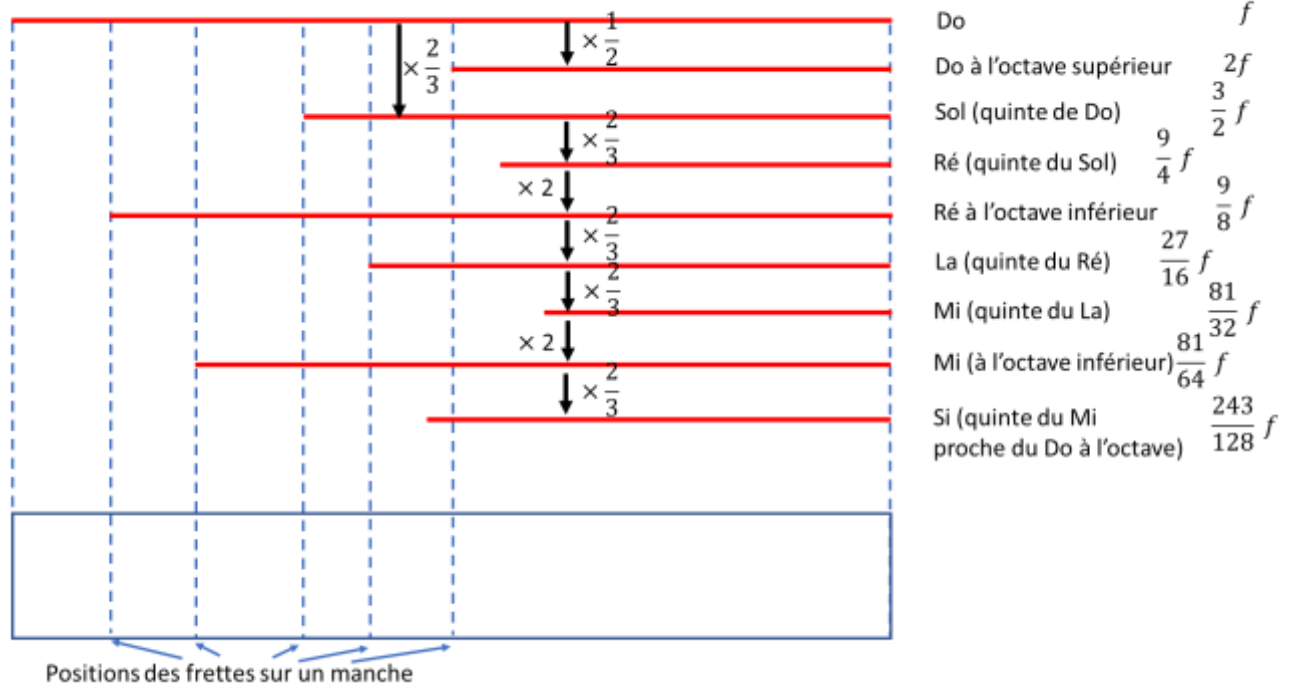
Pythagore s'est fondé sur deux observations pour construire une gamme musicale à 5 notes, à 7 notes puis à 12 notes.

- La première observation est que le son qui est à une octave au-dessus d'un autre ne semble pas à l'oreille humaine comme étant un son différent mais simplement le même son à une tonalité plus élevée.
- La seconde observation est qu'un son situé une quinte au-dessus d'un autre pris comme référence est plus harmonieux à l'oreille avec ce dernier que celui produit avec une quarte.

Pythagore exploite alors ce fait en procédant comme suit. A partir d'un son de référence nommé Do donc de fréquence choisie arbitrairement f , il sait que la fréquence du son situé à l'octave est double, soit $2f$. Il sait également que, dans cet intervalle, se trouve la quinte de fréquence $\frac{3}{2}f = 1,5f$ et la quarte de fréquence $\frac{4}{3}f$. Dans un premier temps, il détermine la quinte de la quinte, ce qui donne un son de fréquence $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}f = \frac{9}{4}f$ mais ce son a une fréquence qui dépasse celle de l'octave car $\frac{9}{4} > 2$

Pythagore considère alors le son qui se situe une octave plus bas, c'est-à-dire à une fréquence moitié, soit $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}f = \frac{9}{8}f$, qui se situe bien dans l'intervalle formé par l'octave $[f, 2f]$. Il réitère ensuite ce procédé jusqu'à obtenir un son de fréquence proche de $2f$ (l'octave). Cela lui fournit une gamme à cinq notes, dont le procédé complet est illustré ci-dessous ainsi que les positions obtenues pour le chevalet sur le monocorde ou sur un manche de guitare afin de produire ces sons.

Construction de la gamme de Pythagore à 5 notes : Do – Ré – Mi – Sol – La par quintes successives



Les 5 notes que Pythagore obtient se retrouvent dans la gamme à 7 notes qu'il va élaborer après et sont : Do – Ré – Mi – Sol (quinte) La. A noter que ne figure pas la quarte, ce qui est le principal inconvénient de cette gamme. Toutefois, si on dispose d'un instrument comme une guitare par exemple, on pourra noter qu'on peut créer tout un jeu de mélodies intéressantes avec ces seules 5 notes, comme la mélodie « Ce n'est qu'un au revoir » du folklore écossais.

En mettant les différentes fractions sous forme de puissances de 2 et de 3, on peut faire apparaître les différents intervalles formés par cette gamme entre deux notes consécutives :

Note	Do	Ré	Mi	Sol	La	Do (octave)
fréquences	f	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$2f$

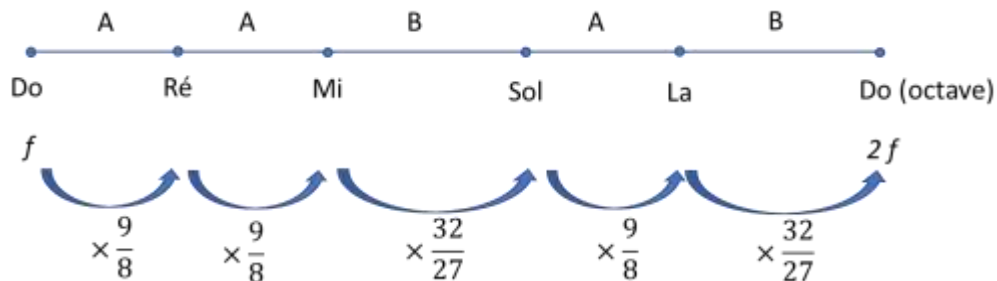
On observe alors que les intervalles Do – Ré, Ré -Mi, et Sol- La sont les mêmes et correspondent à un rapport de fréquence égal à

$$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

Les intervalles Mi -Sol et La -Do (octave) sont également les mêmes avec un rapport :

$$\frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27}$$

On peut résumer cette situation par un schéma du type :



Construction de la gamme de Pythagore à 7 notes

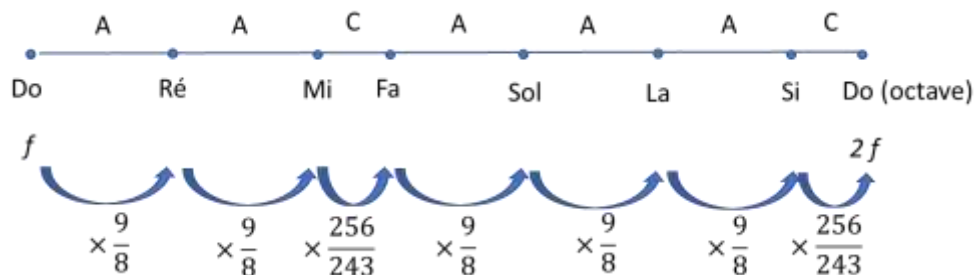
Afin d'intégrer la quarte, Pythagore reprend le procédé précédent de construction de nouvelles notes par quintes ascendantes ramenées dans l'octave, mais en partant de la quarte afin d'être assuré qu'elle y figure. On note alors que la quinte de cette quarte qui est le Fa n'est rien d'autre que le Do à l'octave. En effet la quarte a pour fréquence $\frac{4}{3}f$ et sa quinte a pour fréquence :

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}f = 2f$$

La construction redonne donc les notes de la gamme précédente auxquelles on ajoute la quinte du Mi qui est appelée Si et on obtient le tableau de fréquences :

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do (octave)
fréquences	f	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$\frac{3^5}{2^7}f$	$2f$

Cette gamme à sept notes fait apparaître de nouveaux intervalles A et C.



Les possibilités mélodiques de cette gamme sont très riches. Chacun le sait pour avoir fredonné ne serait-ce que l'air formé sur la gamme ascendante puis descendante : « Do Ré Mi Fa Sol La Si Do, gratte-moi la puce que j'ai dans le dos etc... »

Alors pourquoi s'embêter à rajouter des notes et faire une gamme à douze notes ?

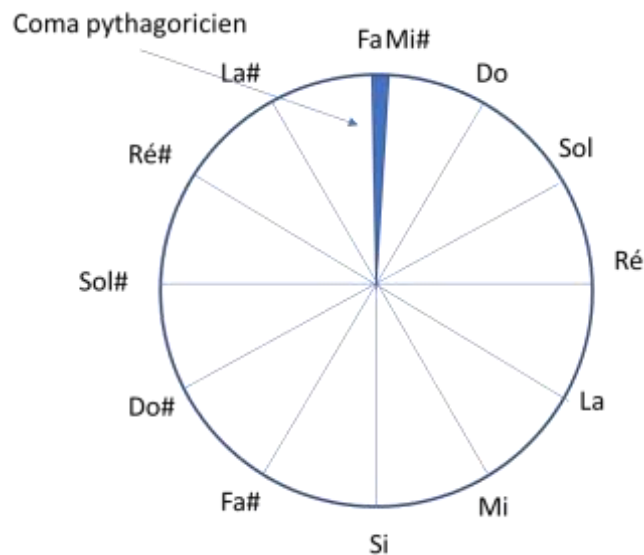
L'inconvénient de la gamme à 7 notes, couramment appelée **gamme diatonique**, est qu'une mélodie ne peut y être jouée à certaines tonalité plus élevée. On dit qu'elle n'est pas transposable. Prenons un exemple en sifflant sur l'air Do -Ré -Mi formé par les trois premières notes. Transposons cet air en commençant par le Ré. Cela donne : Ré -Mi - Fa mais l'air n'est plus le même car dans le premier air se suivent deux intervalles A identiques et dans le second non, puisqu'il y a un intervalle A suivi d'un intervalle C. Cela est bien gênant car cela condamne à jouer des mélodies toujours dans la même tonalité. Or on sait que les humains n'ont pas les mêmes tessitures de voix et ne peuvent pas tous chanter dans les mêmes tonalités, même s'ils peuvent balayer le même nombre d'octaves.

Pythagore poursuit la construction du cycle de quinte en y ajoutant cinq notes, les dièses, afin d'obtenir une gamme à 12 notes :

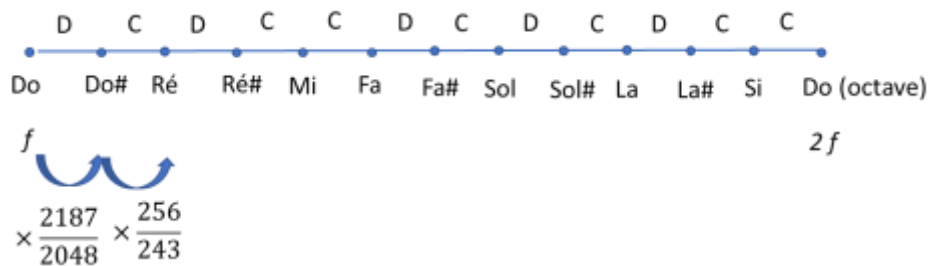
Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do (octave)
Fréq.	f	$\frac{3^7}{2^{11}}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^9}{2^{14}}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3^6}{2^9}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^8}{2^{12}}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}f$	$\frac{3^5}{2^7}f$	$2f$

Les douze notes obtenues peuvent être représentées comme les douze heures d'une horloge en mettant le Fa à 12 heures. Il est à noter que les notes diésées apparaissent dans le même ordre que

les notes non diésées. La quinte de La# qui est Mi# a été également ajoutée bien qu'elle ne fasse pas partie de la gamme.



On constate qu'il y a deux types d'intervalles notés C et D :



Sauf, que les intervalles entre deux notes successives ne sont toujours pas égaux même s'ils sont très proches car :

$$\frac{2187}{2048} \approx 1,068, \quad \frac{256}{243} \approx 1,053$$

Chaque intervalle qualifié de demi-ton, peut prendre deux valeurs pas tout à fait égales, ce qui rend la transposition à nouveau impossible.

Un autre aspect gênant est que le cycle ne boucle pas sur le Fa. En effet, en ajoutant à la construction la quinte du La# on obtient un Mi# qui ne coïncide pas tout à fait avec le Fa en ayant une fréquence légèrement supérieure. Ceci fait qu'en jouant la dernière quinte comme étant l'intervalle entre un La# et le Fa de fréquence supérieure, on produit ce qui est censée être une quinte dans la gamme, mais elle sonne un peu faux. Cette quinte a été appelée **quinte du loup** et l'écart de fréquence entre le Fa et le Mi# a été qualifié de **coma pythagoricien**.

Il faut attendre 1691 avec le musicien allemand Andreas Werckmeister pour que le problème de transposition et de coma pythagoricien soient enfin réglé en modifiant légèrement la gamme à douze

notes de Pythagore qualifiée de gamme naturelle, en créant des intervalles constants entre les différentes notes consécutives, avec un rapport de fréquence q tel que :

$$q^{12} = 2$$

Soit :

$$q = \sqrt[12]{2} \approx 1,059$$

On constate que ce rapport est très proche de celui de l'intervalle C et proche de celui de l'intervalle D.

Cette gamme a reçu le nom de **gamme tempérée**. C'est celle qu'utilise nos instruments modernes, dont pianos, violons, guitares, etc...