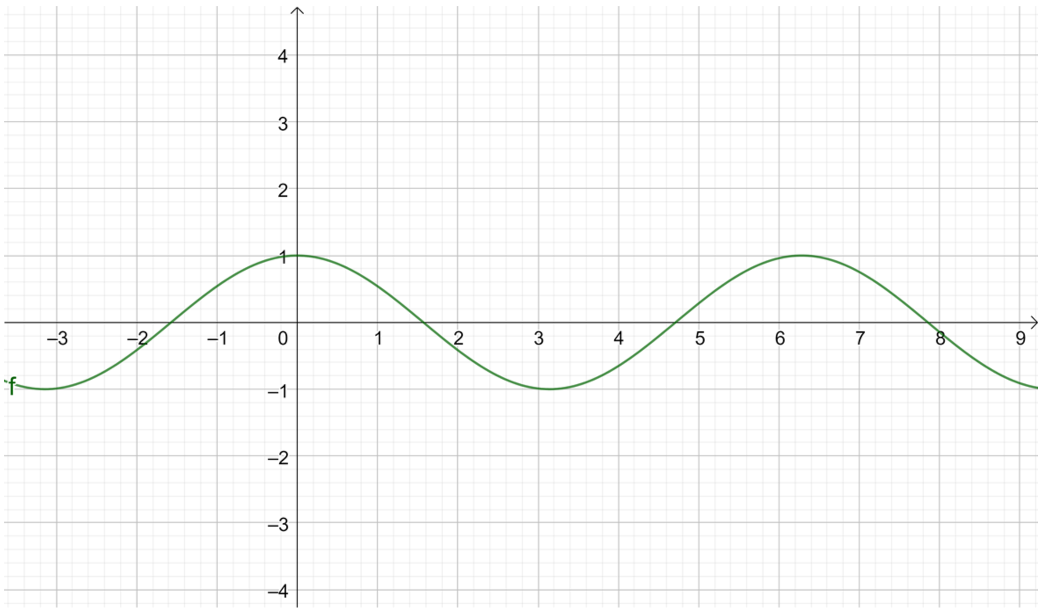
Transformée de Fourier (Fichier en cours de construction)

I Signal temporel sinusoïdal :

Un signal temporel sinusoïdal est une fonction (généralement du temps en physique) dont le graphique a la forme d'une vague, dont l'expression analytique peut être obtenue ainsi à partir d'une fonction de référence ayant cette allure, la fonction $s(t) = cos(t)$

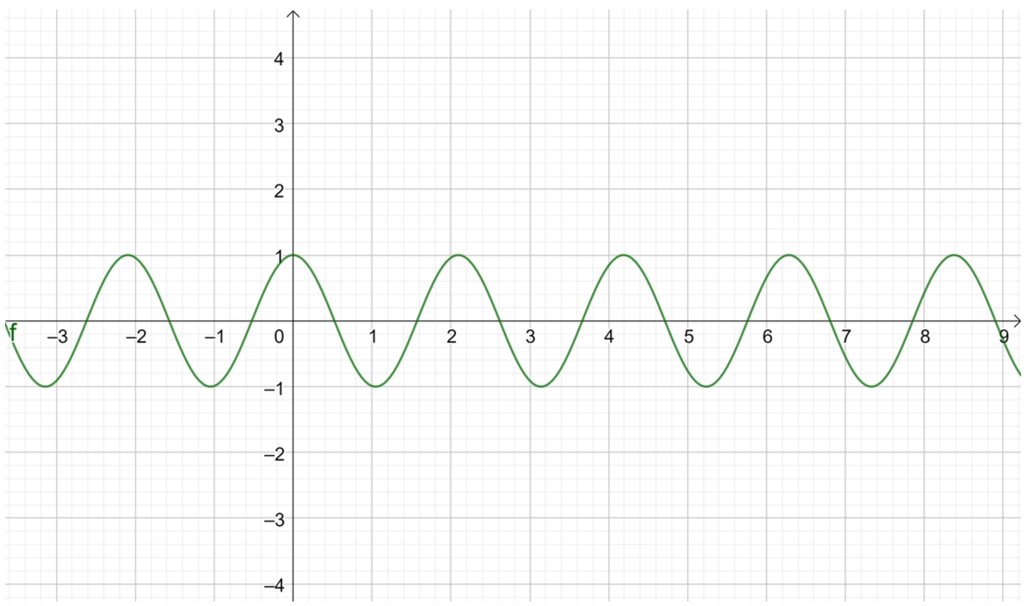
On part de la courbe de cette fonction dans un repère orthonormé d'équation :

$$y = cos(t)$$



On en change la période, la faisant passer de $2\,\pi$ à T, ce qui donne une courbe d'équation :

$$y = cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)$$



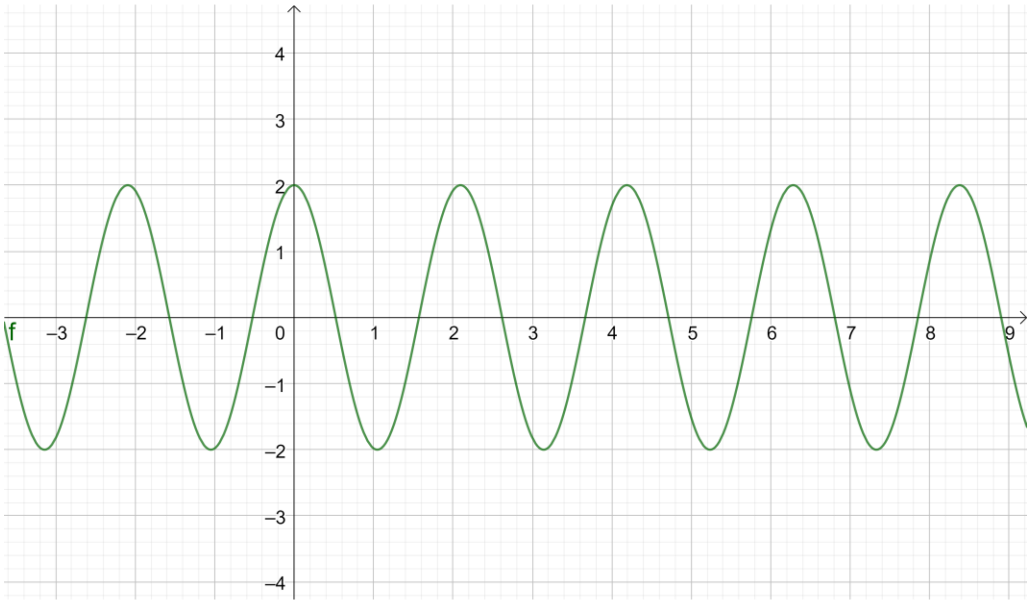
On appelle pulsation du signal la quantité :

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\upsilon$$

où υ désigne la fréquence du signal (c'est-à-dire le nombre (éventuellement non entier) de motifs périodiques par seconde.

On multiplie par un facteur positif $\hat{c}$ afin d'augmenter l'amplitude de la fonction précédente sans en changer l'allure ni les variations, ce qui donne la courbe :

$$y = \hat{c}\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right)$$

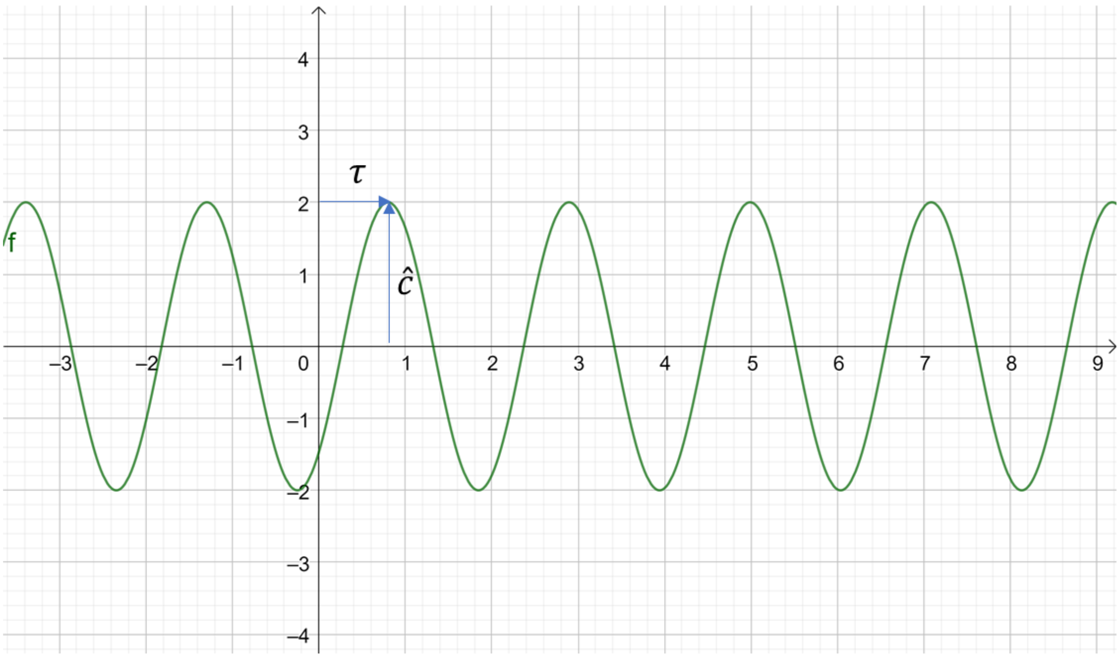


Enfin, on applique un retard τ au signal en décalant la courbe par translation d'une quantité τ vers la droite, ce qui donne la courbe :

$$y = \hat{c}\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\,(t-\tau)\right)$$

Qui se met encore sous la forme :

$$y = \hat{c}\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t+\varphi\right)$$



En développant le cosinus, on en déduit :

$$y = \hat{c}\, cos(\,\varphi)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right) - \hat{c}\, sin(\varphi)\, sin\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right)$$

En posant :

$$\hat{c}\, cos(\,\varphi) = a, \qquad -\hat{c}\, sin(\,\varphi) = b$$

on obtient :

$$y = a\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right) + b\, sin\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right)$$

<u>En résumé :</u>

Tout signal sinusoïdal de période T est de la forme :

$$\boldsymbol{s(t) = \hat{c}\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t + \varphi\right)}$$

$$\boldsymbol{= a\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right) + b\, sin\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right) = a\, cos(\,2\,\pi\,\upsilon\, t) + b\, sin(\,2\,\pi\,\upsilon\, t)}$$

où :

$$\boldsymbol{a + i\, b = \hat{c}\, e^{-i\,\varphi}}$$

Soit :

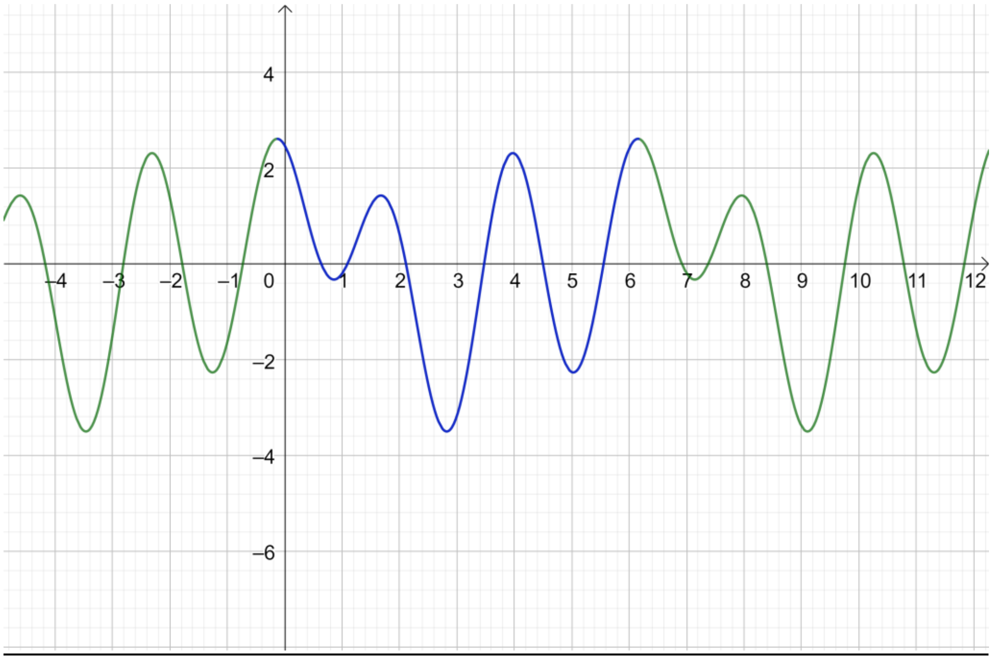
$$\boldsymbol{a = \hat{c}\, cos(\varphi), \qquad b = -\hat{c}\, sin(\varphi)}$$

$$\boldsymbol{\hat{c} = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad tan(\varphi) = \frac{-b}{a}}$$

Exemple de signal périodique avec un nombre fini de composantes sinusoïdales :

$$s(t) = cos(t) + sin(2\,t) + cos\big(3\,(t - 0{,}8)\big)$$

En bleu est représenté le motif périodique



II Superposition de signaux sinusoïdaux :

Considérons un signal formé de l'addition de deux signaux sinusoïdaux dont l'un a une période multiple entier de la période de l'autre :

$$s(t) = \hat{c}_1\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_1}\,t + \varphi_1\right) + \hat{c}_2\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_2}\,t + \varphi_2\right)$$

avec :

$$T_2 = \frac{T_1}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}^*$$

Alors le signal est un signal périodique de période la plus grande des deux périodes, T_1. En effet :

$$s(t + T_1) = \hat{c}_1\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_1}\,(t + T_1) + \varphi_1\right) + \hat{c}_2\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_2}\,(t + T_1) + \varphi_2\right)$$

$$= \hat{c}_1\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_1}\,t + 2\,\pi\, + \varphi_1\right) + \hat{c}_2\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_2}\,t + 2\,\pi\, m + \varphi_2\right)$$

$$= s(t)$$

III Superposition de n signaux sinusoïdaux :

Considérons un signal formé de l'addition d'une constante et de N signaux sinusoïdaux de périodes qui sont des divisions entières de la période du premier appelé signal fondamental :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right) + b_n \, sin\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \, cos(\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t) + b_n \, sin(\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t)$$

Où :

$$T_n = \frac{T_1}{n}, \;\; \upsilon_n = n\,f_1$$

Alors, en généralisant ce qui a été vu en II, ce signal est périodique de période T_1

IV Superposition d'une infinité discrète de signaux sinusoïdaux :

Considérons un signal formé de l'addition d'une constante et d'une infinité discrète de signaux sinusoïdaux de périodes qui sont des divisions entières de la période du premier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right) + b_n \, sin\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right) \qquad (1)$$

Pour qu'un tel signal soit bien défini, nous nous placerons dans la condition suffisante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \quad définies$$

Alors ce signal est un signal périodique de période T_1

V Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier :

Le théorème concernant les séries de Fourier apporte une réciproque au fait précédent. Dans un cadre plus restrictif où $s(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors $s(t)$ peut se mettre de façon unique sous la forme (1) définie ci-dessus, où $T_1 = T$

Pour obtenir les coefficients a_n et b_n il suffit de noter que :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_0\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{t_0}^{t_0+T} cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right)dt + b_n \int_{t_0}^{t_0+T} sin\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\,t\right)dt = a_0\,T$$

et que l'intégrale d'un signal sinusoïdal sur tout intervalle ayant pour longueur sa période est nulle . Ainsi :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt}$$

Il est à noter que a_0 est la valeur moyenne du signal $s(t)$ sur sa période.

Pour les autres coefficients, partons de :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} a_0\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right)\, dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T} cos\left(\frac{2\,\pi}{T_k}\, t\right) cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt + b_k \int_{t_0}^{t_0+T} sin\left(\frac{2\,\pi}{T_k}\, t\right) cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt$$

sachant :

$$cos(\,x)\, cos(\,y) = \frac{1}{2}\,\big(cos(a+b) + cos(a-b)\big)$$

$$sin(\,x)\, cos(\,y) = \frac{1}{2}\,\big(sin(a+b) + sin(a-b)\big)$$

donc :

$$cos\left(\frac{2\,\pi}{T_k}\, t\right) cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) = \frac{1}{2}\left(cos\left(\frac{2\,\pi\, k}{T}\, t + \frac{2\,\pi\, n}{T} t\right) + cos\left(\frac{2\,\pi\, k}{T}\, t - \frac{2\,\pi\, n}{T} t\right)\right)$$

L'intégrale associée ne donne donc une valeur non nulle que lorsque $k = n$ et elle vaut dans ce cas $\frac{1}{2}\, T$

Quant à l'intégrale du produit des sinus, elle est toujours nulle. Ainsi :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt = a_n\, \frac{T}{2}$$

D'où :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt}$$

Une démarche analogue conduit à :

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, sin\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\, t\right) dt}$$

En résumé :

Si $s(t)$ est un signal périodique et continu sur $\mathbb{R}$ alors il est somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier, c'est-à-dire, pour tout réel t :

$$\boldsymbol{s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right)}$$

$$\boldsymbol{= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\,2\,\pi\,n\,\nu\,t) + b_n \sin(\,2\,\pi\,n\,\nu\,t)}$$

$$\boldsymbol{= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{c}_n \cos(\,2\,\pi\,n\,\nu\,t + \varphi_n)}$$

Où :

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right)dt\,, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin\left(\frac{2\,\pi}{T_n}\;t\right)dt}$$

$$\boldsymbol{\hat{c}_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2},\quad Tan(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n}}$$

Si $s(t)$ est seulement continu par morceaux , alors le résultat reste valable sauf aux points de discontinuité pour lesquels on a :

$$\boldsymbol{\frac{s(t^+) + s(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right)}$$

<u>VI Théorème de Parseval</u>

Le théorème de Parseval décrit un point de vue énergétique concernant un signal périodique de période T. Pour être concret, supposons que $s(t)$ soit une intensité traversant un résistor de résistance $1\ \Omega$. Alors l'énergie dissipée par effet Joule à travers le résistor sur un intervalle de durée T est :

$$E = \int_{t_0}^{t_0+T} \big(s(t)\big)^2\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\;t\right)\right)^2\,dt$$

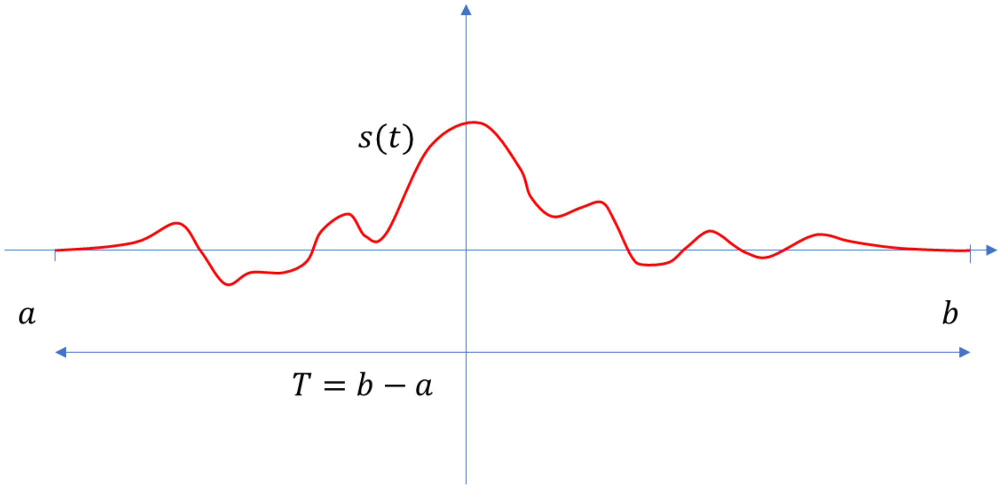
En développant le carré le carré et en éliminant les intégrales des signaux sinusoïdaux de période T, il reste :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (s(t))^2\, dt = a_0{}^2\, T + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2\, \frac{T}{2} + b_n{}^2\, \frac{T}{2} = T\left(a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$$

Cela se traduit par le fait que l'énergie dissipée dans le résistor est la somme des énergies dissipées par chaque composante sinusoïdale prise individuellement ajoutée à l'énergie dissipée par le signal continu.

VII De la série de Fourier à la transformée de Fourier

Plaçons nous dans le cas restrictif d'un signal continu $s(t)$ à support compact, c'est-à-dire d'un signal nul en dehors d'un certain intervalle $[a, b]$ et tel que $s(a) = s(b) = 0$.



Alors nous pouvons créer une fonction g périodique de période $T = b - a$ qui coïncide avec s sur $[a, b]$ et écrire sa décomposition en série de Fourier :

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\, t\right) + b_n\, sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{T}\, t\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}t} + e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}t}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}t} - e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}t}}{2\,i}\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - i\, b_n}{2}\right) e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}t} + \left(\frac{a_n + i\, b_n}{2}\right) e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}t}$$

Posons :

$$c_0 = a_0$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = a_n - i\, b_n = \frac{2}{T}\int_a^b s(t)\, e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}t}\, dt$$

$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{2}{T}\int_a^b s(t)\, e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}t}\, dt$$

Alors :

$$g(t) = c_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n\, e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}\,t} \;+ c_{-n}\, e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}\,t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}\,t}$$

Ainsi :

$$g(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{T}\int_a^b s(u)\, e^{-i\frac{2\,\pi\,n}{T}\,u}\, du\right) e^{i\frac{2\,\pi\,n}{T}\,t}$$

Et, en utilisant les fréquences :

$$\upsilon_n = \frac{n}{T}$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_a^b s(u)\, e^{-i\,2\,\pi\,\upsilon_n\,u}\, du\right) e^{i\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t}\,\frac{1}{T}$$

Posons :

$$S(\upsilon) = \int_a^b s(t)\, e^{-i\;2\,\pi\,\upsilon\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\;2\,\pi\,\upsilon\,t}\, dt$$

Alors :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\upsilon_n)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t}\,\frac{1}{T}$$

En supposant alors que $\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\upsilon)|\;d\upsilon$ existe et en notant que la suite $(\upsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une subdivision régulière de $\mathbb{R}$ de pas :

$$\upsilon_{n+1} - \upsilon_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}$$

on a :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\upsilon_n)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t}\,(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n)$$

Sachant alors qu'on peut prendre T aussi grand que l'on veut, $s(t)$ restant nulle en dehors de tout intervalle contenant $[a, b]$, donc $(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n)$ aussi petit que l'on veut :

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\upsilon_n)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon_n\,t}\,(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n) \;= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\upsilon)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon\,t}\; d\upsilon$$

Donc, sur un intervalle $[a, b]$ pouvant être pris aussi grand que l'on veut :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\upsilon)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon\,t}\ d\upsilon$$

D'où le théorème :

Si $s(t)$ est un signal tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\, dt$ soit définie, alors on peut définir pour tout υ réel la fonction, appelée transformée de Fourier de $s(t)$

$$\boldsymbol{S(\upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\upsilon\,t}\, dt}$$

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|\, d\upsilon$ est définie, alors on peut reconstituer le signal $s(t)$ en appliquant :

$$\boldsymbol{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\upsilon)\, e^{i\,2\,\pi\,\upsilon\,t}\ d\upsilon}$$

Formule de Parseval :

Reprenons le signal précédent $s(t)$ défini sur $[a, b]$ et appliquons lui le théorème de Parseval :

$$\int_a^b \big(s(t)\big)^2\, dt = T\left({a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

$$= T\left(|c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2\right)$$

Or :

$$c_0 = \frac{1}{T}\, S(0)$$

$$c_n = \frac{2}{T}\, S(\upsilon_n)$$

Donc :

$$\int_a^b \big(s(t)\big)^2\, dt = T\left(\frac{1}{T^2}|S(0)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{T^2}|S(\upsilon_n)|^2\right)$$

$$= |S(0)|^2\ \frac{1}{T} + 2\ \sum_{n=1}^{+\infty} |S(\upsilon_n)|^2\ \frac{1}{T}$$

$$= |S(0)|^2\ \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{+\infty} |S(\upsilon_n)|^2\ \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{+\infty} |S(\upsilon_{-n})|^2\ \frac{1}{T}$$

$$= |S(0)|^2\ \frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon_n)|^2\ \frac{1}{T}$$

Finalement :

$$\int_a^b \left(s(t)\right)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon_n)|^2 \left(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n\right)$$

Là encore, si S est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|^2 d\upsilon$ soit défini, sachant qu'on peut prendre T aussi grand que l'on veut ($s(t)$ restant nulle en dehors de tout intervalle contenant $[a, b]$), donc $(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n)$ aussi petit que l'on veut :

$$\lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon_n)|^2 \left(\upsilon_{n+1} - \upsilon_n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|^2 d\upsilon$$

Et comme $s(t)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b \left(s(t)\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(s(t)\right)^2 dt$$

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(s(t)\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|^2 d\upsilon$$

Cela conduit à la formule de Parseval :

Si un signal réel $s(t)$ est tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(s(t)\right)^2 dt$ soit défini (on dit qu'il est d'énergie finie), et si $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|^2 d\upsilon$ est également définie, alors :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(s(t)\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\upsilon)|^2 d\upsilon}$$

VIII Analyse spectrale

Soit un signal $s(t)$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\, dt$ soit définie (on dit $s \in L_1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(s(t)\right)^2 dt$ soit définie (on dit $s \in L_2(\mathbb{R})$) alors la connaissance de la transformée de Fourier $S(\upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\, 2\pi \upsilon t}\, dt$ pour $\upsilon \in [0, +\infty[$ permet de reconstituer le signal $s(t)$ comme nous allons le montrer :

Posons :

$$S(\upsilon) = \hat{S}(\upsilon)\, e^{i\, \varphi(\upsilon)}$$

$\hat{S}(\upsilon)$ étant le module de $S(\upsilon)$ appelé amplitude et $\varphi(\upsilon)$un argument de $S(\upsilon)$ appelé phase.

Notons que $S(\upsilon)$ et $S(-\upsilon)$ sont conjugués donc :

$$\hat{S}(-\upsilon) = \hat{S}(\upsilon)$$

$$\varphi(-\upsilon) = -\varphi(\upsilon)$$

Alors :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t}\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)}\, d\nu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)}\, d\nu + \int_{-\infty}^{0} \hat{S}(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)}\, d\nu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)}\, d\nu + \int_{+\infty}^{0} \hat{S}(-\nu)\, e^{i\,2\,\pi(-\nu)\,t+\varphi(-\nu)}\, d(-\nu)$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)}\, d\nu + \int_{0}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, e^{-i\,(2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu))}\, d\nu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \hat{S}(\nu)\, \left(e^{i\,2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu)} + e^{-i\,(2\,\pi\,\nu\,t+\varphi(\nu))}\right) d\nu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} 2\,\hat{S}(\nu)\, cos\big(2\,\pi\,\nu\,t + \varphi(\nu)\big)\, d\nu$$

Si on crée une subdivision régulière de l'intervalle $[0, +\infty[$, on a alors :

$$s(t) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} 2\,\hat{S}(\nu_n)\,(\nu_{n+1} - \nu_n)\, cos\big(2\,\pi\,\nu_n\,t + \varphi(\nu_n)\big)$$

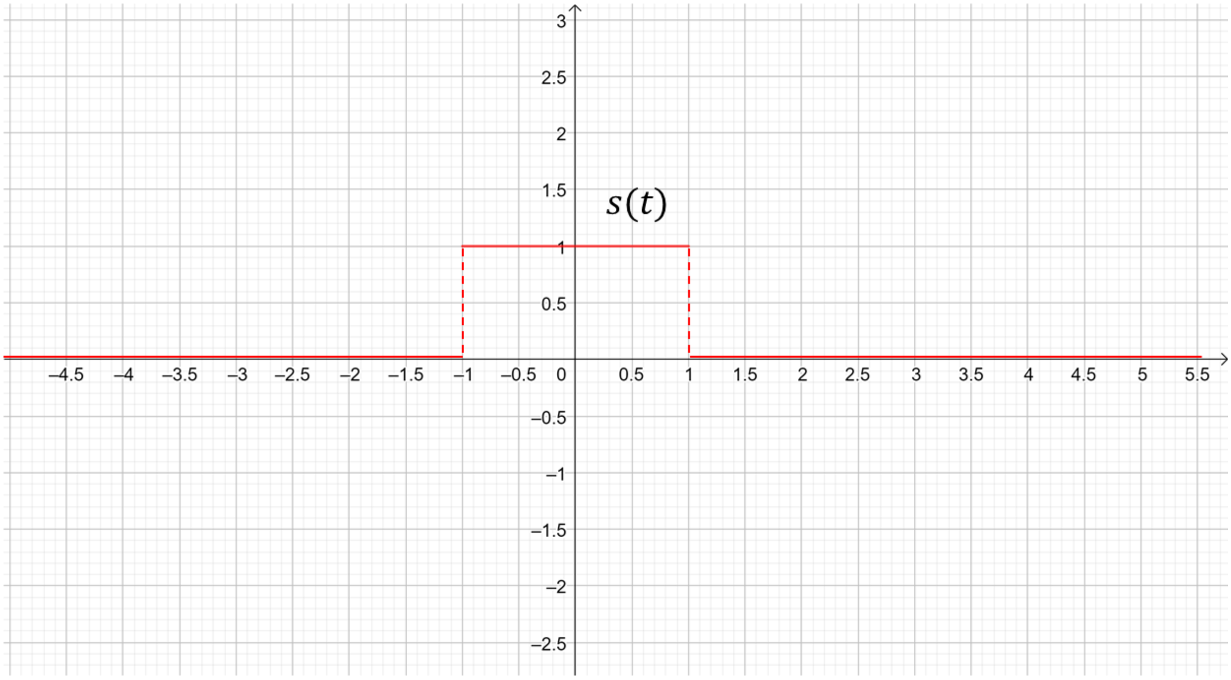
Soit, en posant :

$$\hat{c}_n = 2\,\hat{S}(\nu_n)\,(\nu_{n+1} - \nu_n)$$

$$s(t) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{c}_n\, cos\big(2\,\pi\,\nu_n\,t + \varphi(\nu_n)\big)$$

Ceci permet de comprendre l'usage que l'on peut faire de la transformée de Fourier dans l'analyse d'un signal $s(t)$ à partir de la connaissance des deux fonctions $\hat{S}(\nu)$ et $\varphi(\nu)$ appelées respectivement spectre en amplitude et spectre de phase du signal et représentées par chacune par un graphique sur l'intervalle de fréquences $[0, +\infty[$.

Partons d'un exemple : un signal rectangulaire de la forme :



Calculons sa transformée de Fourier :

$$S(\upsilon) = \int_{-1}^{1} e^{-i\ 2\pi\upsilon t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\ 2\pi\upsilon t}}{-i\ 2\pi\upsilon}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-i\ 2\pi\upsilon} - e^{i\ 2\pi\upsilon}}{-2\, i\ \pi\upsilon} = \frac{sin(2\pi\upsilon)}{\pi\upsilon}$$

Ainsi :

$$\hat{S}(\upsilon) = \frac{|sin(2\pi\upsilon)|}{\pi\upsilon}$$

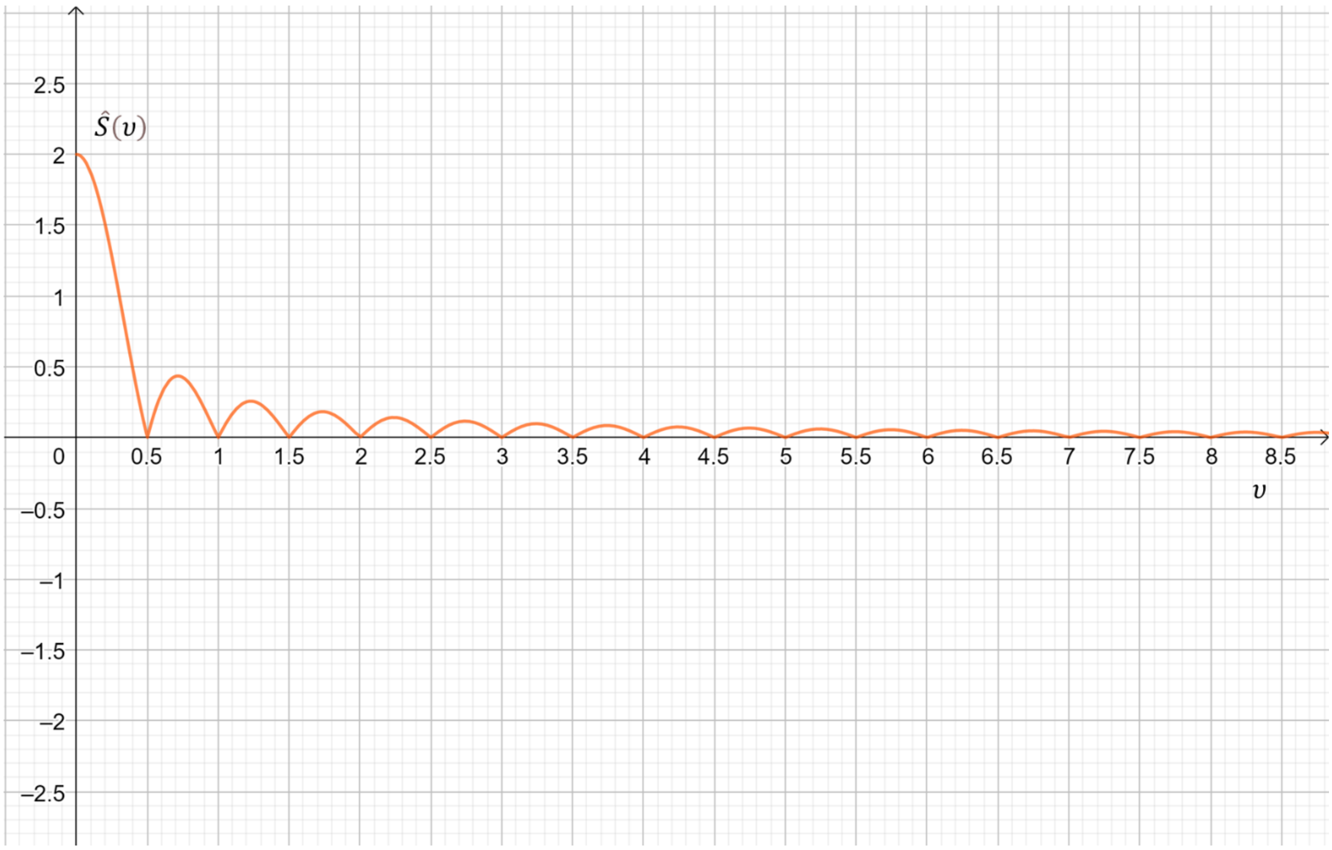
$$\varphi(\upsilon) = 0 \iff sin(2\pi\upsilon) \geq 0$$

$$\iff 2\pi n \leq 2\pi\upsilon \leq 2\pi n + \pi \quad , n \in \mathbb{N}$$

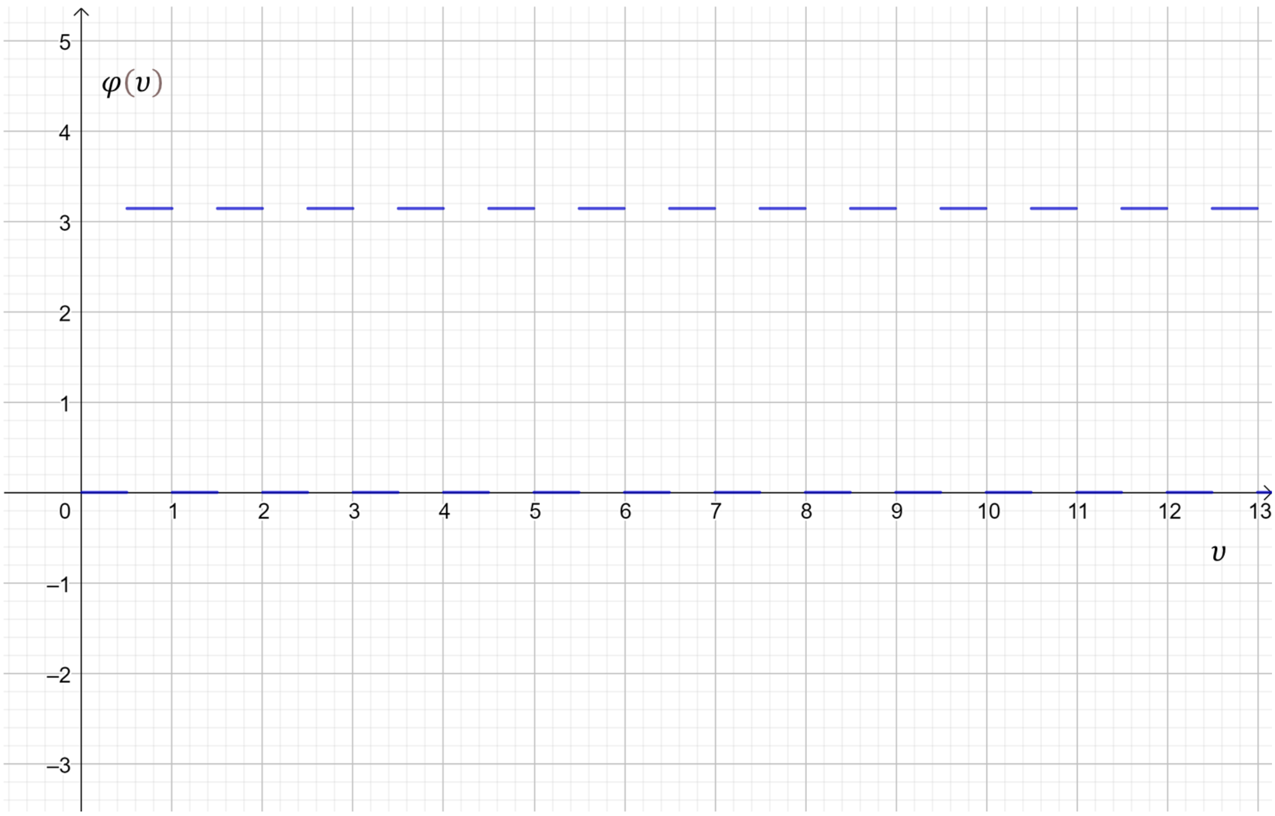
$$\iff n \leq \upsilon \leq n + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\varphi(\upsilon) = \pi \iff n + \frac{1}{2} < \upsilon < n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

D’où le spectre d’amplitude :



Et le spectre de phase

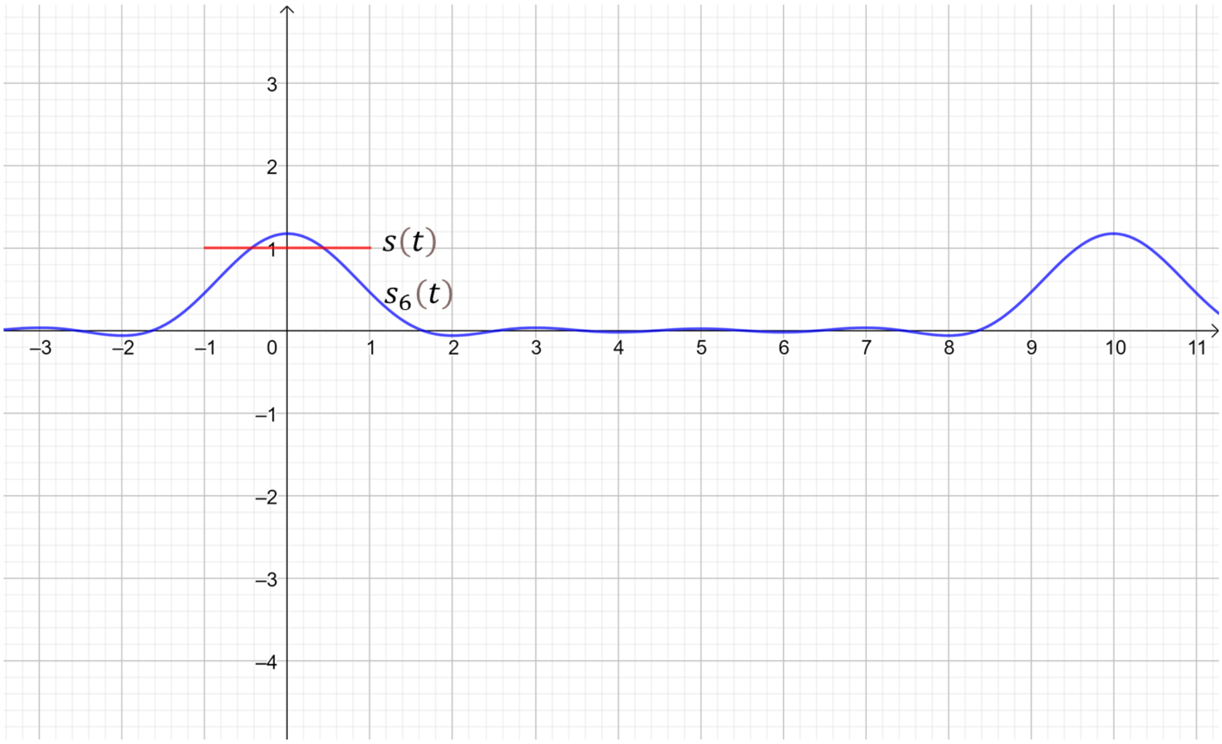


Voyons ce que donne la reconstruction du signal en prenant un pas de discrétisation de 0,1 sur l'axe des fréquences et en ne retenant que les 6 premières composantes de l'intégration, à savoir :

$$s_6(t) = \sum_{n=0}^{5} 2\,\hat{S}(0{,}1\,n) \times 0{,}1\,cos\big(2\,\pi\,(0{,}1\,n)\,t + \varphi(0{,}1\,n)\big)$$

Voici la commande utilisée sous géogebra :

2*0.1+f(0.1)*0.2 cos(2 π*0.1 x)+f(0.2)*0.2 cos(2 π*0.2 x)+f(0.3)*0.2 cos(2 π*0.3 x)+f(0.4)*0.2 cos(2 π*0.4 x)+f(0.5)*0.2 cos(2 π*0.5 x)



Plus on intègre de composantes d'intégration et plus la courbe se rapproche de celle du signal $s(t)$ pour le reconstituer de façon satisfaisante si on en intègre un nombre suffisant et si le pas est suffisamment petit.

La transformée de Fourier permet donc de voir n'importe quel signal physique comme constitué d'une superposition de signaux périodiques qui sont des harmoniques d'un signal fondamental de fréquence suffisamment petite (c'est le pas d'intégration précédent).

Dans l'exemple traité ci-dessus, avec un pas de 0,1, le fondamental a pour fréquence 0,1 Hz soit une période de 10 s, comme on le voit sur le graphique en bleu et le signal $s_6(t)$ présente cette période. Même en augmentant le nombre de composantes d'intégrations (donc le nombre de composantes sinusoïdales, on obtiendra toujours un signal de période 10 s. En revanche si on prend un pas d'intégration en fréquence de 0,01 s, ce signal aura pour période 100 s. Il y a donc un bon compromis à trouver pour représenter convenablement le signal initial $s(t)$ sur un intervalle de temps donné en choisissant pas d’intégration et nombre de composantes d’intégration (donc de signaux sinusoïdaux) adéquats.

Un algorithme qualifié de transformée de Fourier rapide permet de répondre à cette question.