Mouvement d'un système mécanique dans le champ de force créé par un astre ou une planète

I Position du problème :

On s'intéresse au mouvement du centre de gravité M d'un système mécanique, par exemple, le système Terre -Lune dans le champ de pesanteur créé par un astre ou une planète de centre O et que nous appellerons attracteur, située à une distance très grande devant son rayon, le mouvement étant étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ pouvant être considéré comme Galiléen (par exemple le référentiel héliocentrique)

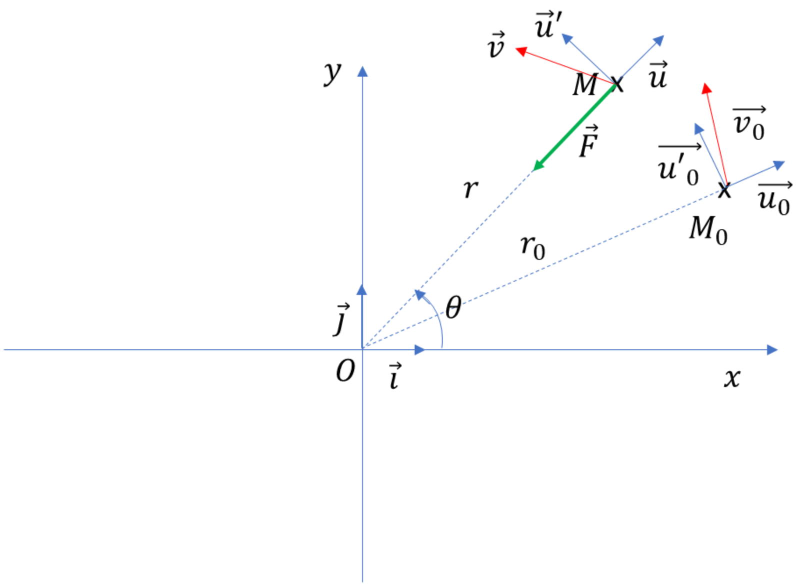
II Description cinématique :

Si on considère comme conditions initiales dans le référentiel $\mathcal{R}$, pour le centre de gravité M, une position M_0 et un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$, alors la force qui s'exerce à cet instant est dans le plan $\left(O, \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{v_0}\right)$. Elle a donc pour effet de déplacer le point M dans ce plan, et ceci, par le même raisonnement, à tout instant. Le mouvement de M dans $\mathcal{R}$ est donc un mouvement qui se fait dans un plan passant par le centre O de l'attracteur.

Munissons donc ce plan d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ définissant une orientation et considérons un système (r, θ) de coordonnées polaires ainsi qu'un repère local polaire $(\vec{u}, \vec{u}')$ défini, rappelons-le par :

$$\vec{u} = cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$



Ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u} = r\,(cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u} + r\,\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\vec{u}}{d\theta}$$

Afin de simplifier les écritures, nous emploierons les notations pointées pour les dérivées temporelles :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

Ce qui permet de résumer la cinématique de position, vitesse, sous la forme :

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u} \\ \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u} + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}'\end{gathered}}$$

Dérivons à nouveau cette dernière relation en notant que :

$$\frac{d\vec{u}'}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\vec{u}'}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}\,\frac{d^2\vec{u}}{d\theta^2} = \dot{\theta}\,\vec{u}'' = -\dot{\theta}^2\,\vec{u}$$

Ainsi :

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}' + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}' - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{u} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}'}$$

<u>III Equations polaires du mouvement- constante des aires</u> :

La seule force qui s'exerce est une force gravitationnelle. En supposant l'attracteur de masse m et le système étudié de masse m_S, cette force s'exprime par :

$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,m_S}{r^2}\;\vec{u}$$

On qualifie cette force de centrale car elle pointe toujours vers un même point, le point O. D'après la seconde loi de Newton, il en est de même pour l'accélération car :

$$\vec{F} = m_S\,\vec{a}$$

Ainsi :

$$-\frac{G\,m}{r^2}\;\vec{u} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{u} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}'$$

Posons pour la suite :

$$K = G\,m$$

Alors, par projection dans le repère polaire, nous obtenons, les équations polaires du mouvement :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\dfrac{K}{r^2} \\ r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0 \end{cases}}$$

Intéressons nous à la seconde équation et notons que :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right) = 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\,\ddot{\theta} \ = r\left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)$$

Cette seconde équation est donc équivalente à (r ne s'annulant pas) :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right) = 0$$

Soit :

$$r^2\,\dot{\theta} = {r_0}^2\,\dot{\theta_0}$$

Or :

$$\overrightarrow{v_0} = \dot{r}_0\,\vec{u}_0 + r_0\,\dot{\theta_0}\,\vec{u}'_0$$

Donc :

$$r_0\,\dot{\theta_0} = \overrightarrow{v_0}\ \cdot\ \vec{u}'_0$$

Nous noterons alors :

$$\boxed{C = {r_0}^2\,\dot{\theta_0} = OM_0\ \times\ v_{\theta_0}}$$

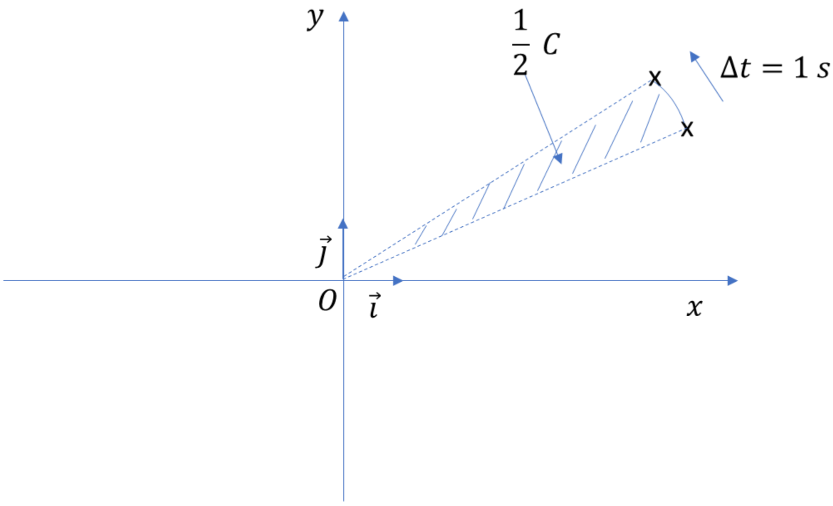
Où v_{θ_0} est la composante sur $\vec{u}'_0$ du vecteur vitesse initial.

<u>Interprétation de C :</u>

C est appelée constante des aires. Pour l'interpréter, considérons le temps Δt mis pour balayer un secteur d'angle α, c'est-à-dire pour que le point M ait un angle polaire passant d'une valeur θ_1 à l'instant t_1 à la valeur $\theta + \alpha$ et calculons l'aire de ce secteur :

$$A(\theta_1, \theta_1 + \alpha) = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\alpha} \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\,C\,\Delta t$$

C s'interprète donc comme le double de l'aire du secteur balayé en une seconde.



On aboutit ainsi à la conclusion, formulée par Képler :

Des aires égales sont balayées pendant des durées égales

Les équations polaires du mouvement se réécrivent à l'aide de cette constante :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\dfrac{K}{r^2}} \\ \boldsymbol{r^2\,\dot{\theta} = C} \end{cases}}$$

IV Trajectoire :

Pour obtenir la nature de la trajectoire, il faut intégrer les équations du mouvement et éliminer le temps de leur formulation.

On commence par éliminer θ grâce à la seconde équation :

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

Ce qui reporté dans la première, donne :

$$\ddot{r} - r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = -\frac{K}{r^2}$$

Soit :

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{K}{r^2}$$

Cherchons alors une représentation polaire de la trajectoire sous forme :

$$r = f(\theta)$$

Puis procédons à un changement de variable en posant :

$$z = \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)}$$

Et en notant :

$$z' = \frac{dz}{d\theta} = -\frac{f'(\theta)}{f(\theta)^2}$$

$$z'' = \frac{d^2z}{d\theta^2}$$

Soit :

$$r = \frac{1}{z}$$

$$\dot{r} = -\frac{\dot{z}}{z^2} = -r^2\,\dot{z} = -r^2\,\dot{\theta}\,z' = -C\,z'$$

$$\ddot{r} = -C\,\dot{\theta}\,z'' = -\frac{C^2}{r^2}\,z'' = -C^2\,z^2\,z''$$

Ce qui reporté dans la première équation du mouvement donne :

$$-C^2\,z^2\,z'' = C^2z^3 - K\,z^2$$

Soit en divisant par $C^2\,z^2$ et en normalisant :

$$\boxed{\boldsymbol{z'' + z = \frac{K}{C^2}}}$$

Cette équation a pour solution générale :

$$z = A\,cos(\theta + \varphi) + \frac{K}{C^2}$$

soit :

$$\frac{1}{r} = A\,cos(\theta)\,cos(\varphi) - A\,sin(\theta)\,sin(\varphi) + \frac{K}{C^2}$$

Et en dérivant

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = \dot{\theta}\,\big(-A\,sin(\theta)\,cos(\varphi) + A\,cos(\theta)\,sin(\varphi)\big)$$

Soit :

$$\dot{r} = C\,\big(-A\,sin(\theta)\,cos(\varphi) + A\,cos(\theta)\,sin(\varphi)\big)$$

En prenant l'origine des temps et l'axe des abscisses tels que $\theta_0 = 0$, on en déduit :

$$\frac{1}{r_0} = A\,cos(\varphi) + \frac{K}{C^2}$$

$$\dot{r}_0 = C\,A\,sin(\varphi)$$

On obtient donc les constantes d'intégration A et φ en déterminant la forme exponentielle du complexe :

$$\boxed{\boldsymbol{A\,e^{i\,\varphi} = \frac{1}{r_0} - \frac{K}{C^2} + i\,\frac{\dot{r}_0}{C}}}$$

A est son module et φ un argument.

Ainsi , l'équation polaire de la trajectoire est de la forme :

$$r = \frac{1}{A\,cos(\theta+\varphi)+\frac{K}{C^2}} = \frac{\frac{C^2}{K}}{1+A\,\frac{C^2}{K}\,cos(\theta+\varphi)}$$

Soit en posant :

$$p = \frac{C^2}{K}$$

$$e = A\,\frac{C^2}{K}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{p}{1+e\,cos(\theta+\varphi)}}}$$

Changeons alors de repère en considérant la base orthonormée $(\vec{I},\vec{J})$ de même orientation que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et telle que $(\vec{\imath},\vec{I}) = -\varphi$. Alors, si on note (r,θ) un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on a :

$$\theta_1 = (\vec{I},\overrightarrow{OM}) = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM}) - (\vec{\imath},\vec{I}) = \theta+\varphi$$

Ainsi $(r,\theta+\varphi)$ est un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$. Dans ce repère, l'équation polaire de la trajectoire est donc de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{p}{1+e\,cos(\theta_1)}}}$$

Posons alors :

$$\overrightarrow{OM} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}$$

Soit :

$$\begin{cases} X = r\,cos(\theta_1) \\ Y = r\,sin(\theta_1) \end{cases}$$

Alors, l'équation devient :

$$r + e\,r\,cos(\theta_1) = p$$

Soit :

$$r = p - e\,X$$

Donc :

$$r^2 = (p - e\,X)^2$$

$$X^2 + Y^2 = p^2 - 2\,e\,p\,X + e^2\,X^2$$

D’où :

$$(1-e^2)\,X^2 + 2\,e\,p\,X + Y^2 = \,p^2$$

Soit, dans le cas $e \neq 1$: :

$$X^2 + 2\,\frac{e\,p}{1-e^2}\,X + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\left(X + \frac{e\,p}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^2\,p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\left(X + \frac{e\,p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

Plaçons nous dans le repère translaté $\left(O_1, \vec{I}, \vec{J}\right)$ où :

$$\overrightarrow{OO_1} = -\frac{e\,p}{1-e^2}\,\vec{I}$$

Alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

Soit :

$$X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} = -\frac{e\,p}{1-e^2}\,\vec{I} + X_1\,\vec{I} + Y_1\,\vec{J}$$

D’où les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} X_1 = X + \dfrac{e\,p}{1-e^2} \\ Y_1 = Y \end{cases}$$

L’équation cartésienne de la trajectoire devient :

$$\boxed{\boldsymbol{X_1}^2 + \frac{\boldsymbol{Y_1}^2}{\boldsymbol{1-e^2}} = \frac{\boldsymbol{p^2}}{\boldsymbol{(1-e^2)^2}}}$$

Distinguons plusieurs cas :

<u>1^er cas : $\boldsymbol{e < 1}$</u>

Posons alors :

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

L’équation devient :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{X_1}^2}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{Y_1}^2}{\boldsymbol{b^2}} = 1}$$

Qui est une ellipse de demi grand axe a, demi petit axe b de centre O_1 et de de foyers F et F' tels que :

$$\overrightarrow{O_1F} = f\,\vec{I},\ \ \overrightarrow{O_1F'} = -f\,\vec{I}$$

Où :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{1-e^2}} = \sqrt{\frac{e^2\,p^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{e\,p}{1-e^2}$$

Autrement dit :

$$F = O$$

Le centre de gravité de l'attracteur est donc un foyer de cette ellipse.

Notons également que :

$$\frac{f}{a} = \frac{e\,p}{1-e^2} :\ \frac{p}{1-e^2} = e$$

Donc $\boldsymbol{e}$ **s'interprète comme étant l'excentricité de cette ellipse**.

<u>2ème cas : $\boldsymbol{e = 1}$</u>

L'équation dans $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ est :

$$2\,p\,X + Y^2 = \ p^2$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{X = -\frac{1}{2\,p}\,Y^2 + \frac{p}{2}}}$$

Ce qui est l'équation d'une parabole d'axe $\left(O, \vec{I}\right)$

<u>3ème cas : $\boldsymbol{e > 1}$</u>

Posons alors :

$$a = \frac{p}{e^2 - 1},\ \ b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{X_1}^2}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{Y_1}^2}{\boldsymbol{b^2}} = 1}$$

Qui est une hyperbole d'axes de symétrie $\left(O, \vec{I}\right)$ et d'axe $\left(O, \vec{J}\right)$ et dont on démontre comme précédemment que O est un des foyers et e est l'excentricité.