Fonction numérique de plusieurs variables réelles

(FICHIER EN COURS D'ELABORATION)

I Approche

Soit f une fonction définie sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ comme par exemple :

$$f(x, y) = \sqrt{x} - y$$

définie sur le sous-ensemble de couples (x, y) vérifiant $x \geq 0$ et représenté par un demi-plan dans un plan muni d'un repère orthonormé d'axe des abscisses x et axe des ordonnées y.

Cette fonction peut être visualisée graphiquement par une nappe d'équation $z = \sqrt{x} - y$ en complétant le plan par un axe des z de façon à obtenir un repère orthonormé.

L'image du couple $(1; 1)$ est :

$$f(1; 1) = 0$$

Nous allons alors formaliser un concept intuitif de continuité en ce point. Plus (x, y) est « proche » de $(1; 1)$ plus son image est « proche » de celle de $(1; 1)$. Voyons un sens rigoureux à cela.

Situons nous dans une zone carrée incluse dans le domaine de f, de centre $(1; 1)$ de la forme :

$$]1 - \beta; 1 + \beta[\times]1 - \beta; 1 + \beta[$$

Pour un couple $(x; y)$ dans cette zone, que nous écrirons sous la forme $(1 + h; 1 + k)$, nous avons :

$$f(1 + h; 1 + k) - f(1; 1) = \sqrt{1 + h} - (1 + k) = \sqrt{1 + h} - 1 - k$$

Or la fonction $\sqrt{x}$ étant continue en 1, nous pouvons écrire pour $\varepsilon > 0$

$$\exists \, \beta_1 > 0 : \; |h| < \beta_1 \; \Rightarrow \; \left|\sqrt{1 + h} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en prenant :

$$\beta_2 = \min\left(\beta_1; \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On a :

$$\forall\,(x,y) \in \left]1-\beta_2; 1+\beta_2\right[^2 : |f(1+h;1+k) - f(1;1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cela va nous amener à définir le concept de continuité de façon plus générale, en commençant progressivement par celui de fonction à deux variables.

II Limite-continuité d'une fonction numérique à deux variable réelles

1) Définition

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un sous ensemble $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{R}^2$ qualifié de domaine et à valeur dans $\mathbb{R}$ et soit $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0}) \in \boldsymbol{D}$.

$\boldsymbol{f}$ tend vers une limite $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}$ en $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0})$ si :

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \left]\boldsymbol{0}; +\infty\right[\ \exists\, \boldsymbol{\beta} \in \left]\boldsymbol{0}; +\infty\right[:$$

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \left]\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{\beta}\right[\times \left]\boldsymbol{y_0}-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{y_0}+\boldsymbol{\beta}\right[: |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}| < \varepsilon$$

ou, de façon équivalente :

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \left]\boldsymbol{0}; +\infty\right[\ \exists\, \boldsymbol{\beta} \in \left]\boldsymbol{0}; +\infty\right[: \forall\,(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}) \in \left]-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\beta}\right[^2 : |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}; \boldsymbol{y_0}+\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{L}| < \varepsilon$$

On écrira alors :

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}$$

$\boldsymbol{f}$ sera dite continue en $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0})$ si :

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0};\boldsymbol{y_0})$$

2) **Fonctions partielles**

Soit f une fonction définie sur un sous ensemble D de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0; y_0) \in D$. On définit deux fonctions qualifiées de fonctions partielles en $(x_0; y_0)$:

$$f_{x_0*}(y) = f(x_0; y)$$

$$f_{*y_0}(x) = f(x; y_0)$$

Si f tend vers une limite $L \in \mathbb{R}$ en $(x_0; y_0)$ alors f_{x_0} tend vers L en y_0 et f_{y_0} tend vers L en x_0 mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple qui suit :

Soit f définie par :

$$f(x; y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x; y) \neq (0; 0)$$

Nous avons :

$$f_{0*}(y) = 0 \quad f_{*0}(x) = 0$$

Les fonctions partielles tendent donc vers 0 en $(0; 0)$ mais f ne tend pas vers 0 en $(0; 0)$. Il suffit de noter pour $x \neq 0$ que l'on a :

$$f(x; x) = \frac{1}{2}$$

Si f tendait vers 0 en $(0; 0)$ on aurait en particulier :

$$\lim_{x \to 0} f(x; x) = f(0; 0) = 0$$

Ce qui est contradictoire.

3) **Propriété séquentielle** :

Soit f une fonction numérique à deux variables, définie sur un sous ensemble D et tendant vers une limite $L \in \mathbb{R}$ en $(x_0; y_0)$. Si (X_n) et (Y_n) sont deux suites tendant respectivement vers x_0 et y_0 alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(X_n; Y_n) = L$$

Preuve :

Soit $\varepsilon \in]0;+\infty[$ alors :

$$\exists\, \beta \in]0;+\infty[\,:$$

$$\forall\,(x,y) \in]x_0-\beta;x_0+\beta[\times]y_0-\beta;y_0+\beta[\,:|f(x;y)-L|<\varepsilon$$

donc pour $\beta > 0$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \;\Rightarrow\; X_n \in]x_0-\beta;x_0+\beta[$$

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : n > n_2 \;\Rightarrow\; Y_n \in]y_0-\beta;y_0+\beta[$$

En prenant :

$$n_3 = \max(n_1;n_2)$$

$$n > n_3 \;\Rightarrow\; (X_n,Y_n) \in]x_0-\beta;x_0+\beta[\times]y_0-\beta;y_0+\beta[$$

$$\Rightarrow |f(X_n,Y_n)-L|<\varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} f(X_n;Y_n) = L$$

4) Uniforme continuité par rapport à une variable.

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur un sous ensemble D de la forme $I\times[a;b]$ où a et b sont deux réels quelconques et I un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (souvent un intervalle dans les cas pratiques)

On dit que f est uniformément continue en $(x_0;y_0)$ par rapport à la seconde variable y si :

$$\forall\,\boldsymbol{\varepsilon} \in]0;+\infty[\;\;\exists\,\boldsymbol{\beta} \in]0;+\infty[\,:$$

$$\forall\,\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{\beta}[\;\forall\,\boldsymbol{y}\in[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]\,:\;|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0};\boldsymbol{y})|<\varepsilon$$

Propriété :

si f est continue en $(x_0;y_0)$ alors f est uniformément continue en $(x_0;y_0)$ par rapport à la seconde variable y.

<u>Preuve :</u>

supposons f continue en $(x_0; y_0)$ et par l'absurde, non uniformément continue en $(x_0; y_0)$ par rapport à la seconde variable y.

La négation de l'uniforme continuité s'écrit :

$$\exists\ \varepsilon_1 \in]0; +\infty[\ \ \forall\ \beta \in]0; +\infty[\ :$$

$$\exists\ x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[\ \exists\ y \in [a; b]\ :\ |f(x; y) - f(x_0; y)| \geq \varepsilon_1$$

En prenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, des valeurs de β de la forme :

$$\beta = \frac{1}{n}$$

Nous avons :

$$\exists\ X_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}\right[\ \exists\ Y_n \in [a; b]\ :\ |f(X_n; Y_n) - f(x_0; Y_n)| \geq \varepsilon_1$$

Or tous les termes X_n vérifient :

$$x_0 - \frac{1}{n} < X_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes montre alors que :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = x_0$$

La suite (Y_n) étant bornée, on peut en extraire une suite $\left(Y_{g(n)}\right)$ qui converge vers une limite L.

Or les termes $Y_{g(n)}$ vérifient :

$$a \leq Y_{g(n)} \leq b$$

Donc par passage à la limite :

$$a \leq L \leq b$$

Ainsi, par composée :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(X_{g(n)}; Y_{g(n)}\right) = f(x_0; L)$$

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x_0; Y_{g(n)}\right) = f(x_0; L)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left|f\left(X_{g(n)}; Y_{g(n)}\right) - f\left(x_0; Y_{g(n)}\right)\right| = 0$$

Ce qui est contradictoire avec :

$$\left|f\left(X_{g(n)};Y_{g(n)}\right)-f\left(x_0;Y_{g(n)}\right)\right|\geq\varepsilon_1$$

5) **Première conséquence intégrale de l'uniforme continuité partielle**.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction numérique de deux variables, continue sur un sous ensemble $\boldsymbol{D}$ de la forme $\boldsymbol{I}\times[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux réels quelconques et $\boldsymbol{I}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On définit sur $\boldsymbol{I}$ la fonction :

$$\boldsymbol{g(x)=\int_a^b f(x,y)dy}$$

alors $\boldsymbol{g}$ est continue sur $\boldsymbol{I}$

Preuve :

Soit $x_0\in I$ et h tel que $x_0+h\in I$ alors :

$$g(x_0+h)-g(x_0)=\int_a^b f(x_0+h,y)dy-\int_a^b f(x_0,y)dy$$

$$=\int_a^b\big(f(x_0+h,y)-f(x_0,y)\big)\,dt$$

Donc :

$$|g(x_0+h)-g(x_0)|\leq\int_a^b|f(x_0+h,y)-f(x_0,y)|dt$$

Soit $\varepsilon\in\,]0;+\infty[$ alors l'uniforme continuité de f par rapport à y permet d'écrire :

$$\exists\,\beta\in\,]0;+\infty[\,:$$

$$\forall\,x\in\,]x_0-\beta;x_0+\beta[\;\forall\,y\in[a;b]:\;|f(x;y)-f(x_0;y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Donc :

$$|h|<\beta\;\Rightarrow\;x_0+h\;\in\,]x_0-\beta;x_0+\beta[\Rightarrow\;\forall\,y\in[a;b]:\;|f(x_0+h;y)-f(x_0;y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x_0+h,y)-f(x_0,y)|dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x_0+h)-g(x_0)| < \varepsilon$$

donc g continue en x_0

6) Dérivée partielle

Soit f une fonction numérique à deux variables définie sur un sous ensemble D et continue en $(x_0; y_0) \in D$ de fonctions partielles en ce point :

$$\boldsymbol{f_{x_0*}(y) = f(x_0; y)}$$

$$\boldsymbol{f_{*y_0}(x) = f(x; y_0)}$$

On dit que f est dérivable par rapport à sa première variable en $(x_0; y_0)$ si la fonction partielle f_{*y_0} est dérivable en x_0 et on note le nombre dérivé sous la forme :

$$\boldsymbol{f'_{*y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)}$$

On dit que f est dérivable par rapport à sa seconde variable en $(x_0; y_0)$ si la fonction partielle f_{x_0*} est dérivable en y_0 et on note le nombre dérivé sous la forme :

$$\boldsymbol{f'_{x_0*}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)}$$

7) Seconde conséquence intégrale de l'uniforme continuité partielle.

Soit f une fonction numérique de deux variables continue sur un sous ensemble D de la forme $I \times [a; b]$ où a et b sont deux réels quelconques et I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On définit sur I la fonction :

$$\boldsymbol{g(x) = \int_a^b f(x,y)dy}$$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point (x, y) de D, et si cette dérivée partielle, en tant que fonction de deux variables, est continue sur D, alors g est dérivable sur I et :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} :\ \boldsymbol{g'(x)} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$$

<u>Preuve</u> :

Soit $x_0 \in I$ et h tel que $x_0 + h \in I$ alors :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy = \int_a^b \left(\frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right) dy$$

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $\theta(h, y)$ tel que :

$$\frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h, y)h, y)$$

avec :

$$|\theta(h, y)| < 1$$

On en déduit :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h, y)h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right) dy$$

Soit :

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h, y)h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right| dy$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ étant continue sur $I \times [a; b]$ est uniformément continue en x_0 par rapport à sa seconde variable.

Soit $\in\,]0; +\infty[$, l'uniforme continuité permet alors d'écrire :

$$\exists\, \beta \in\,]0; +\infty[\ :$$

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \beta; x_0 + \beta[\ \forall\, y \in [a; b] :\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Donc :

$$|h| < \beta \Rightarrow |\theta(h,y)\,h| < \beta \Rightarrow x_0 + \theta(h,y)\,h \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[\Rightarrow$$

$$\forall\, y \in [a;b] : \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h,y)h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h,y)h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\right| dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy\right| < \varepsilon$$

donc g dérivable en x_0 et :

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy$$

8) <u>Troisième conséquence intégrale</u>

Soit f une fonction numérique de deux variables continue sur un sous ensemble D de la forme $I \times]a;b[$ où a et b sont deux réels quelconques et I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On suppose f localement intégrable au sens de Riemann sur $]a;b[$ pour tout $x \in I$ et possédant une dérivée partielle par rapport à sa première variable continue sur $I \times]a;b[$ et on définit sur I la suite de fonctions pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n}$:

$$g_n(x) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f(x,y)dy$$

Et la suite des fonctions dérivées :

$$g'_n(x) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

S'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $g_n(x_0)$ converge et si la suite de fonctions $g'_n(x)$ converge uniformément sur I alors les intégrales impropres de f et de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $[a; b]$ sont convergentes et si on pose :

$$g(x) = \int_a^b f(x, y)dy$$

alors g est dérivable sur I et :

$$\forall\, x \in I : \; g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$$

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème sur la dérivée d'une limite de suites de fonctions dérivables combinée à la propriété de la dérivation sous le signe intégral vue juste au dessus.

Différentes variantes s'obtiennent pour une ou les deux bornes infinies, par exemple dans le cas où a est finie et $b = +\infty$:

Avec les mêmes hypothèses que précédemment sur f et en posant :

$$g_n(x) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{n} f(x, y)dy$$

Et la suite des fonctions dérivées :

$$g'_n(x) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$$

S'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $g_n(x_0)$ converge et si la suite de fonctions $g'_n(x)$ converge uniformément sur I alors les intégrales impropres de f et de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $[a; +\infty[$ sont convergentes et si on pose :

$$g(x) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dy$$

alors g est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} :\ \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}}$$

<u>Exemple d'application</u> : **<u>la fonction Gamma</u>**

Etudier la dérivabilité de la fonction Gamma définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{+\infty} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1}}\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\, \boldsymbol{dy}}$$

Examinons le domaine de convergence de l'intégrale impropre

<u>En 0</u> :

$$y^{x-1}\, e^{-y} \sim \frac{1}{y^{1-x}}$$

La condition de convergence est alors :

$$1 - x < 1$$

Soit :

$$x > 0$$

<u>En $+\infty$</u> :

$$\lim_{y\to+\infty} y^2(y^{x-1}\, e^{-y}) = 0$$

La règle de Riemann s'applique et l'intégrale est convergente.

Donc Γ est définie sur $]0;+\infty[$

<u>Dérivabilité sur $]0;+\infty[$</u> :

Considérons la suite de fonctions sur $]0;+\infty[$ pour $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} y^{x-1}\, e^{-y}\, dy$$

Et posons :

$$f(x,y) = y^{x-1}\, e^{-y} = e^{(x-1)\,Ln(y)-y}$$

f est continue sur $]0;+\infty[\times\left[\frac{1}{n};n\right]$ et admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\left[\frac{1}{n};n\right]$ qui est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=Ln(y)e^{(x-1)\,Ln(y)-y}=Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]0;+\infty[\times\left[\frac{1}{n};n\right]$ par théorèmes généraux (produit, somme, composition)

Donc $\Gamma_n(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall\,x\in\,]0;+\infty[\,:\;\Gamma'_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy$$

Les mêmes règles que pour $\Gamma(x)$ montrent que l'intégrale impropre de $Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}$ est convergente sur $[0;+\infty[$. La suite de fonctions $\Gamma'_n(x)$ tend donc simplement sur $]0;+\infty[$ vers :

$$\int_{0}^{+\infty}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy$$

Montrons que cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[a;b]$ inclus dans $]0;+\infty[$ en considérant :

$$\int_{0}^{+\infty}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy-\Gamma'_n(x)=\int_{0}^{\frac{1}{n}}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy+\int_{n}^{+\infty}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy$$

Nous avons alors

$$\left|\int_{0}^{+\infty}Ln(y)\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy-\Gamma'_n(x)\right|\leq\int_{0}^{\frac{1}{n}}|Ln(y)|\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy+\int_{n}^{+\infty}|Ln(y)|\,y^{x-1}\,e^{-y}\,dy$$

Or pour $y\in\left]0;\frac{1}{n}\right]$ et pour $x\in[a;b]$ on a :

$$\ln(y)<0$$

$$a-1\leq x-1$$

donc :

$$y^{x-1}=e^{(x-1)\ln(y)}\leq e^{(a-1)\ln(y)}$$

Et pour $y\in[n;+\infty[$ et pour $x\in[a;b]$ on a :

$$\ln(y) > 0$$

$$x - 1 \leq b - 1$$

donc :

$$y^{x-1} = e^{(x-1)\ln(y)} \leq e^{(b-1)\ln(y)}$$

D'où :

$$\left|\int_0^{+\infty} Ln(y)\, y^{x-1}\, e^{-y}\, dy - \Gamma'_n(x)\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |Ln(y)|\, y^{a-1}\, e^{-y}\, dy + \int_n^{+\infty} |Ln(y)|\, y^{b-1}\, e^{-y}\, dy$$

Les intégrales de $|Ln(y)|\, y^{a-1}\, e^{-y}$ et de $|Ln(y)|\, y^{b-1}\, e^{-y}$ étant convergentes en 0, la quantité majorante ci-dessus est une suite indépendante de x qui tend vers 0. La suite de fonctions $\Gamma'_n(x)$ converge donc uniformément sur $[a; b]$.

On en déduit, combiné au fait que $\Gamma_n(x)$ converge simplement vers $\Gamma(x)$ sur $[a; b]$ que Γ est dérivable sur $[a; b]$ et donc sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in\,]0; +\infty[\ :\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} Ln(y)\, y^{x-1}\, e^{-y}\, dy$$

Le processus peut être réitéré par une récurrence simple et conduit au fait que Γ est dérivable à tout ordre sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\,]\mathbf{0}; +\infty[\ :\ \boldsymbol{\Gamma^{(p)}(x)} = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{Ln^{p}(y)\, y^{x-1}\, e^{-y}\, dy}}$$

Cette fonction Γ a en outre des propriétés remarquables. Faisons en effet une intégration par partie sur $\Gamma_n(x)$:

$$\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} y^{x-1}\, e^{-y}\, dy$$

en posant de façon classique en présence d'une exponentielle :

$$u(y) = y^{x-1}\ \ ,\ \ \ v'(y) = e^{-y}$$

$$u'(y) = (x-1)\, y^{x-2}\ \ ,\ \ \ v(y) = -e^{-y}$$

alors :

$$\Gamma_n(x) = [-y^{x-1}\, e^{-y}]_{\frac{1}{n}}^{n} + (x-1)\int_{\frac{1}{n}}^{n} y^{x-2}\, e^{-y}\, dy$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, pour $x > 1$ de telle sorte que l'intégrale converge :

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x)$$

Soit en changeant de variable :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[\ :\ \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})}$$

Cette propriété permet de donner une expression simple de Γ pour les entiers naturels par une récurrence évidente, sachant que :

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-y}\, dy = 1$$

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ :\ \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\,!}$$

II Eléments de topologie de $\mathbb{R}^2$- Notion d'ouvert, de fermé, de compact

1) Définition d'un carré ouvert de centre $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, d'un losange ouvert et d'un disque ouvert

Un carré ouvert $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ de centre $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et de demi-largeur $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 :\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\beta}\,, |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}| < \boldsymbol{\beta}\}$$

Un losange ouvert $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ de centre $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et de demi-largeur $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 :\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}| < \boldsymbol{\beta}\}$$

Un disque ouvert $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ de centre $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et de rayon $\boldsymbol{\beta}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{D(A,\beta) = \left\{M = (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \beta\right\}}$$

Une propriété évidente d'un point de vue géométrique est la suivante :

$$\forall\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2 \times]\mathbf{0},+\infty[\ :\ \exists\ \boldsymbol{\beta}' \in]\mathbf{0},+\infty[\ :\ \boldsymbol{C(A,\beta) \subset L(A,\beta')}$$

Autrement dit :

Tout losange ouvert de centre A contient un carré ouvert de centre A et la réciproque est vraie

De même, tout disque ouvert de centre A contient un carré ouvert de centre A et réciproquement et tout il contient un losange ouvert de centre A et réciproquement.

<u>Preuves :</u>

Il suffit de noter que l'on a pour tous couples de réels (x,y), (a,b) et tout réel $\beta > 0$:

$$|x-a| < \beta \text{ et } |y-b| < \beta \Rightarrow |x-a| + |y-b| < 2\,\beta$$

$$|x-a| + |y-b| < \beta \Rightarrow |x-a| < \beta \text{ et } |y-b| < \beta$$

$$|x-a| < \beta \text{ et } |y-b| < \beta \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \sqrt{2}\,\beta$$

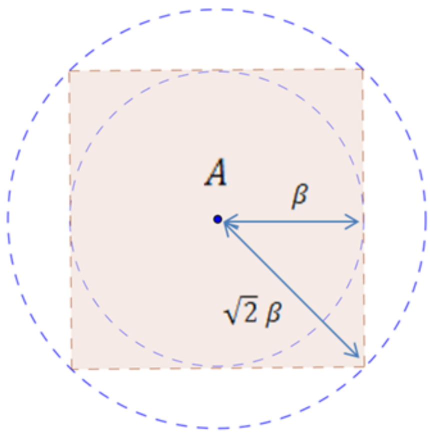
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \beta \Rightarrow |x-a| < \beta \text{ et } |y-b| < \beta$$

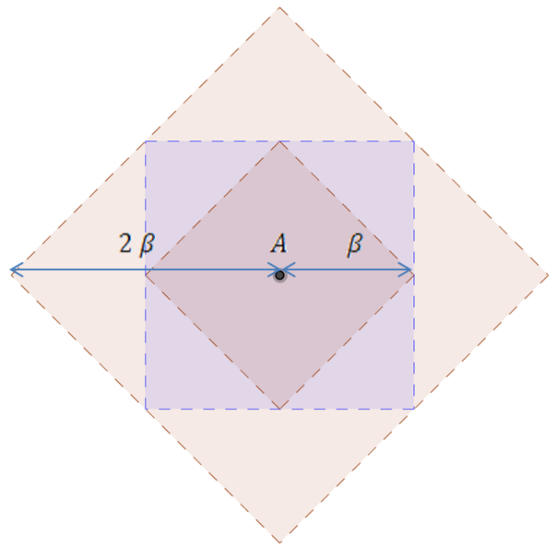
Autrement dit :

$$L(A,\beta) \subset C(A,\beta) \subset L(A,2\,\beta)$$

$$D(A,\beta) \subset C(A,\beta) \subset D\left(A,\sqrt{2}\,\beta\right)$$

Ce qui se traduit géométriquement par les figures :





2) <u>Voisinage d'un point $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$</u>

Soit une partie $\boldsymbol{V}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{V}$, on dit que cette partie est un voisinage de $\boldsymbol{A}$ si elle contient un carré ouvert de centre $\boldsymbol{A}$

Si on note $\mathbb{V}(\boldsymbol{A})$ l'ensemble des voisinages de $\boldsymbol{A}$, la définition s'écrit :

$$\boldsymbol{V} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}, +\infty[\,:\, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) \subset \boldsymbol{V}$$

A noter, compte tenu des remarques précédentes, deux définitions équivalentes :

$$\boldsymbol{V} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}, +\infty[\,:\, \boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) \subset \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{V} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{\beta} \in]\mathbf{0}, +\infty[\,:\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) \subset \boldsymbol{V}$$

3) <u>Ouvert</u>

Soit une partie $\boldsymbol{\Omega}$ de $\mathbb{R}^2$, on dit que cette partie est ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points.

4) <u>Fermé</u>

Soit une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^2$, on dit que cette partie est fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte.

Une caractérisation est la suivante :

Une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^2$ est fermée si et seulement si elle vérifie :

Pour toute suite $\boldsymbol{A_n = (x_n, y_n)}$ de points de $\mathbb{F}$ telle que $\boldsymbol{x_n}$ converge vers une limite $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{y_n}$ converge vers une limite $\boldsymbol{b}$, le point $\boldsymbol{A = (a, b)}$ appartient à $\mathbb{F}$

<u>Preuve :</u>

Soit $\mathbb{F}$ une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ et soit une suite $A_n = (x_n, y_n)$ de points de $\mathbb{F}$ telle que x_n converge vers une limite a et y_n converge vers une limite b.

Supposons par l'absurde que $A = (a, b)$ ne soit pas dans $\mathbb{F}$. Alors A est dans son complémentaire $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$ qui est ouvert. Nous avons donc :

$$\exists\, \beta > 0 : C(A, \beta) \subset \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$$

Or, par propriété de limite :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \;\Rightarrow\; c - \beta < x_{g(n)} < c + \beta$$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \;\Rightarrow\; d - \beta < y_{g(n)} < d + \beta$$

Soit en posant : $n_2 = \max\,(n_0, n_1)$:

$$n > n_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} c - \beta < x_{g(n)} < c + \beta \\ d - \beta < y_{g(n)} < d + \beta \end{cases} \Rightarrow\; \left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) \in C(A, \beta)$$

$$\Rightarrow\; \left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$$

ce qui est contradictoire et prouve que $A \in \mathbb{F}$

Réciproquement , supposons que pour toute suite $A_n = (x_n, y_n)$ de points de $\mathbb{F}$ telle que x_n converge vers une limite a et y_n converge vers une limite b, le point $A = (a, b)$ appartient à $\mathbb{F}$, alors :

Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$ ne soit pas ouvert. Alors, il existe un point $A = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$ pour lequel $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$ n'est pas un voisinage de ce point, donc, pour tout entier naturel non nul n, aucun des carrés ouverts $C(A, 1/n)$ n'est inclus dans $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{F}$ d'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\; \exists\, (x_n, y_n) \in \mathbb{F}\, \cap C\left(A, \frac{1}{n}\right)$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n} \\ b - \dfrac{1}{n} < y_n < b + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Donc par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = b$$

Par hypothèse, on en déduit :

$$(a, b) \in \mathbb{F}$$

ce qui est contradictoire.

5) <u>Compact</u>

Soit une partie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^2$, on dit que cette partie est compacte si elle est fermée et bornée

III Propriété d'une fonction continue sur un compact

Soit f une fonction numérique à deux variables, définie sur une partie compacte $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^2$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

$$\exists\, \big((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\big) \in \mathbb{K}^2 :\ \forall\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{K} :\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

<u>Preuve :</u>

<u>Caractère borné de f</u> :

Supposons par l'absurde que f ne soit pas majorée, alors aucun entier naturel n ne majore f, ce qui se traduit par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \exists\, (x_n, y_n) \in \mathbb{K} :\ f(x_n, y_n) > n$$

Or les suites ainsi formées (x_n) et (y_n) sont bornées donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire deux sous-suites $\left(x_{g(n)}\right)$ et $\left(y_{g(n)}\right)$ qui sont convergentes. Notons alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{g(n)} = c$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_{g(n)} = d$$

$\mathbb{K}$ étant fermé et $\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right)$ une suite de points de $\mathbb{K}$, nous en déduisons, par la caractérisation séquentielle d'un fermé, que (c, d) est dans $\mathbb{K}$.

f étant continue en (c, d) nous en déduisons :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) = f(c, d)$$

Mais par ailleurs :

$$f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) > g(n)$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$$

ce qui est absurde, donc f est majorée.

Le fait que f soit minorée se démontre de façon analogue, ou bien en appliquant la propriété que l'on vient de montrer à $-f$

f atteint ses bornes:

Notons $M = sup\{f(x, y) :\ (x, y) \in \mathbb{K}\}$

Ecrivons que pour tout entier naturel n non nul, $M - 1/n$ n'est pas un majorant de f :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \exists\, (x_n, y_n) \in \mathbb{K} :\ M - \frac{1}{n} < f(x_n, y_n) \leq M$$

Extrayons alors des deux suites ainsi définies, deux suites convergentes, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{g(n)} = c$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_{g(n)} = d$$

Alors, $\mathbb{K}$ étant fermé : $(c, d) \in \mathbb{K}$ et par continuité :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) = f(c, d)$$

mais aussi :

$$M - \frac{1}{g(n)} < f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) \leq M$$

Par passage à la limite, on en déduit :

$$f(c, d) = M$$

On procède de même pour la borne inférieure de f sur $\mathbb{K}$ ou on raisonne sur $-f$

<u>Remarque</u> :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a; b]$, donc fermés bornés, sont qualifiés également de parties compactes de $\mathbb{R}$ et plus généralement, toutes les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$. Nous reviendrons, en les étendant, sur ces notions d'ouvert, de fermé et de compact dans le fichier consacré à la topologie.

Mais d'ores et déjà, nous pouvons voir que :

l'image d'une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ par une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> :

Soit f continue sur une partie compacte $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Soit une suite $f(x_n, y_n)$ de $f(\mathbb{K})$ convergeant vers une limite L. Alors, on peut extraire des sous-suites telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_{g(n)} = c$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_{g(n)} = d$$

Alors, $\mathbb{K}$ étant fermé : $(c, d) \in \mathbb{K}$ et par continuité :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) = f(c, d)$$

Mais par ailleurs

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x_{g(n)}, y_{g(n)}\right) = L$$

donc :

$$f(c, d) = L$$

d'où

$$L \in f(\mathbb{K})$$

$f(\mathbb{K})$ est donc fermé et comme il est borné, il est compact.

Attention !

Compact dans $\mathbb{R}$ ne signifie pas être un intervalle. Il n'y a qu'à prendre pour $\mathbb{K}$ l'union de deux carrés disjoints, par exemple $[0;1]^2 \times [2;3]^2$ et de définir f constante égale à 1 sur le premier carré et à 2 sur le second. On a alors $f(\mathbb{K}) = \{1;2\}$. f est continue sur $\mathbb{K}$ et $f(\mathbb{K})$ est bien une partie compacte de $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas un intervalle.

Pour obtenir le fait que $f(\mathbb{K})$ soit un intervalle, il faudrait une notion de connexité, traduisant qu'on peut relier deux points de $\mathbb{K}$ par une courbe continue, nous y reviendrons ultérieurement. Alors, nous aurons à nouveau la propriété des valeurs intermédiaires.

IV Différentiabilité d'une fonction numérique à deux variable réelles

1) Propriété-Définition

Soit f une fonction numérique à deux variables définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et $A = (a,b) \in \Omega$.

Si f admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable et à seconde variable en tout point de Ω et si l'une ou l'autre des fonctions de deux variables définies par ces dérivées partielles est continue en A alors il existe une fonction $\mathcal{E}(x,y)$ définie sur Ω et telle que :

$$\boldsymbol{f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-a)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,\gamma(x,y)}$$

avec :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \gamma(x,y) = 0$$

Une formulation équivalente s'obtient en posant :

$$(x,y) = (a+h, b+k)$$

$$\mathcal{E}(h,k) = \gamma(a+h, b+k)$$

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\sqrt{h^2+k^2}\,\mathcal{E}(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mathcal{E}(h,k)=0$$

Cette dernière formulation sera plus pratique à l'emploi.

On dit alors que f est différentiable au point $A=(a,b)$ et on qualifie de différentielle au point A, l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(h,k)\to h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Cette application, encore qualifiée d'application linéaire tangente, est notée df_A. Ainsi, la propriété s'écrit :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+df_A(h,k)+\sqrt{h^2+k^2}\,\mathcal{E}(h,k)$$

En considérant les éléments de $\mathbb{R}^2$ comme des vecteurs, nous pouvons faire intervenir la norme euclidienne, associé au produit scalaire classique :

$$\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}$$

Afin de simplifier les écritures, nous allons noter :

$$A=(a,b)$$

$$H=(h,k)$$

$$O=(0,0)$$

ces quantités étant considérées comme des vecteurs. La propriété se réécrit alors :

$$f(A+H)=f(A)+df_A(H)+\|H\|\,\mathcal{E}(H)$$

$$\lim_{H\to O}\mathcal{E}(H)=0$$

Nous pouvons noter que l'application différentielle agit comme un produit scalaire.

Notons en effet :

$$\overrightarrow{Grad}(f)_A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A),\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$$

Ce vecteur étant appelé gradient de f en A

alors :

$$\boxed{\boldsymbol{df_A(H) = \overrightarrow{Grad}(f)_A \cdot H}}$$

<u>Preuve de la propriété de différentiabilité</u>

On suppose par exemple $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continue sur Ω. Ω étant ouvert, il contient un disque $D(A,\beta)$. Plaçons nous sur le disque fermé $D'(A,\delta)$ avec $\delta = \beta/2$, on a alors :

$$f(x,y) - f(a,b) = f(x,y) - f(x,b) + f(x,b) - f(a,b)$$

Or la fonction partielle $f(x,y)$ de y, à x fixé est continue sur $[b-\delta; b+\delta]$ et dérivable sur $[b-\delta; b+\delta]$. Le théorème des accroissements finis s'applique et conduit à :

$$f(x,y) - f(x,b) = (y-b)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, b+\theta(y)\,y)$$

avec :

$$|\theta(y)| < 1$$

En outre, la fonction partielle $f(x,b)$ de x, est dérivable en a. Le développement de Taylor Young à l'ordre 1 montre qu'il existe une fonction $\mathcal{E}_1(x)$ telle que sur $[a-\delta; a+\delta]$ on ait :

$$f(x,b) - f(a,b) = (x-a)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (x-a)\mathcal{E}_1(x)$$

avec :

$$\lim_{x\to a} \mathcal{E}_1(x) = 0$$

Ainsi :

$$f(x,y) - f(a,b) = (x-a)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (y-b)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, b+\theta(y)\,y) + (x-a)\mathcal{E}_1(x)$$

Or, par continuité de la dérivée partielle par rapport à y en (a,b), nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta(y)y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \mathcal{E}_2(x,y)$$

avec :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathcal{E}_2(x,y) = 0$$

Donc :

$$f(x,y) - f(a,b)$$

$$= (x-a)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (y-b)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (x-a)\mathcal{E}_1(x) + (y-b)\mathcal{E}_2(x,y)$$

d'où :

$$\left| f(x,y) - f(a,b) - (x-a)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - (y-b)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right|$$

$$\leq |x-a||\mathcal{E}_1(x)| + |y-b||\mathcal{E}_2(x,y)|$$

$$\leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}|\mathcal{E}_1(x)| + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}|\mathcal{E}_2(x,y)|$$

$$\leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ (|\mathcal{E}_1(x)| + |\mathcal{E}_2(x,y)|)$$

D'où, en posant pour $(x,y) \neq (a,b)$:

$$\gamma(x,y) = \frac{f(x,y) - f(a,b) - (x-a)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - (y-b)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

On a :

$$|\gamma(x,y)| \leq |\mathcal{E}_1(x)| + |\mathcal{E}_2(x,y)|$$

On en déduit par théorème des gendarmes :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \gamma(x,y) = 0$$

ce qui établit la propriété.