Fonctions-Applications-bijections

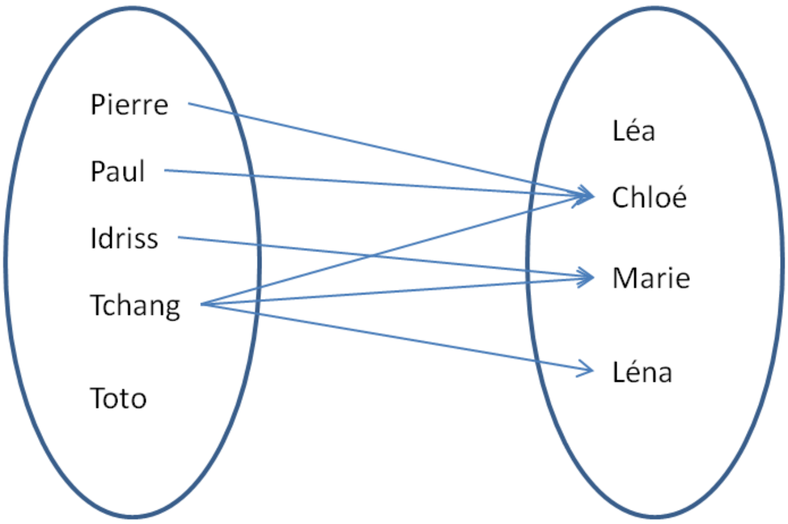
I Préambule : la relation

Considérons deux ensembles, un $\mathbb{E}$ dit **ensemble de départ**, et un, $\mathbb{F}$, dit ensemble d'arrivée. Pour éclairer notre propos, nous prendrons comme exemple, pour $\mathbb{E}$, un groupe de garçons et pour $\mathbb{F}$, un groupe de filles, à savoir :

$$\mathbb{E} = \{\text{Pierre}, \text{Paul}, \text{Idriss}, \text{Tchang}, \text{Toto}\}$$

$$\mathbb{F} = \{\text{Léa},\ \ \text{Chloé},\ \ \text{Marie},\ \ \text{Léna}\}$$

Supposons que les affinités entre garçons et filles de ces ensembles soient telles que la relation, du type « a pour amie » peut être résumée par le diagramme en patates suivant :



Ainsi, Pierre et Tchang ont la même amie Chloé, Tchang a trois amies et Toto n'en a pas. Léa n'est l'amie de personne.

Nous allons alors traduire ce diagramme dans le langage mathématique, qui consiste à décrire chaque chose à l'aide d'ensemble, en définissant la relation par un objet :

$$r = (\mathbb{E}\,, \mathbb{F}\,, \mathbb{G})$$

$\mathbb{G}$ étant un sous ensemble de couples (on dit du produit cartésien $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$) appelé **graphe** défini par :

$$\{(\text{Pierre}, \text{Chloé})\ ;\ (\text{Paul}, \text{Chloé})\ ;\ (\text{Idriss}, \text{Marie})\ ;\ (\text{Tchang}, \text{Chloé})\ ;\ (\text{Tchang}, \text{Marie});\ (\text{Tchang}, \text{Léna})\}$$

Prenons un second exemple : Soit un plan muni d'un repère orthonormé et soit le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1. Nous pouvons définir une relation entre abscisses et ordonnées par :

$$r = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{G})$$

avec :

$$\mathbb{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ x^2 + y^2 = 1\}$$

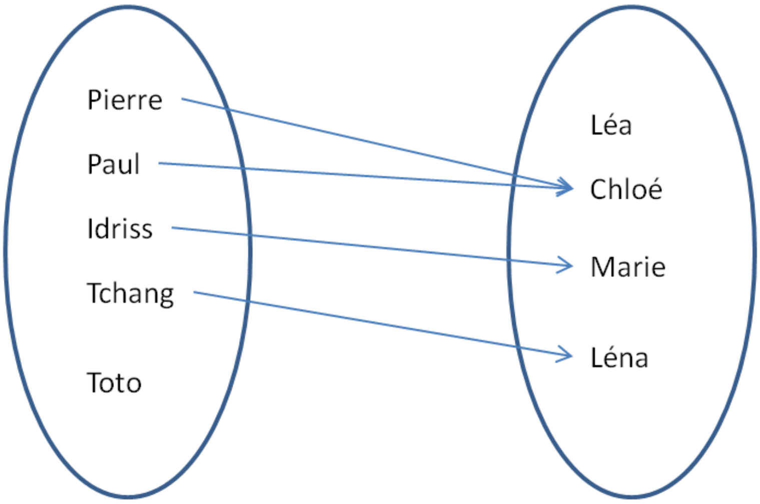
De façon générale, toute courbe d'un plan muni d'un repère définit une relation entre l'ensemble $\mathbb{R}$ des abscisses et l'ensemble $\mathbb{R}$ des ordonnées.

II : la fonction

Une fonction est une relation **univoque**, c'est-à-dire pour laquelle on a :

$$\boxed{\forall\, (x, y, y') \in \mathbb{E} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}\ :\ (x, y) \in \mathbb{G}\ \wedge (x, y') \in \mathbb{G}\ \Rightarrow\ y = y'}$$

Ce qui signifie qu'un élément de l'ensemble de départ ne peut être lié qu'à un élément au plus de l'ensemble d'arrivée. L'exemple précédent avec les patates n'est pas une fonction. Pour l'être, il faut qu'une flèche, au plus, parte d'un élément de la patate de gauche, comme dans l'exemple suivant, qui pourrait traduire une relation du type « a pour meilleur amie » :



De même le cercle de l'exemple précédent ne définit pas une fonction, mais le demi-cercle supérieur, tout comme le demi-cercle inférieur, oui. Ainsi pour le premier :

$$f^+ = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{G})$$

$$\mathbb{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ y = \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

et pour le second :

$$f^- = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{G})$$

$$\mathbb{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ y = -\sqrt{1 - x^2}\right\}$$

Afin de simplifier la description des fonctions dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, on se contente de donner l'expression conduisant au calcul de y à partir de x qui se traduit généralement par un algorithme programmable de calcul. Ainsi pour les deux exemples ci-dessus , on écrit simplement :

$$f^+(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f^-(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

L'élément y qui est en relation avec un élément x de l'ensemble de départ est appelé **image** de x, tandis que x est un **antécédent** de y.

Tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image.

Tout élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents.

Une fonction possède un **domaine de définition** D. C'est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui possèdent une image. Ainsi dans l'exemple avec les patates :

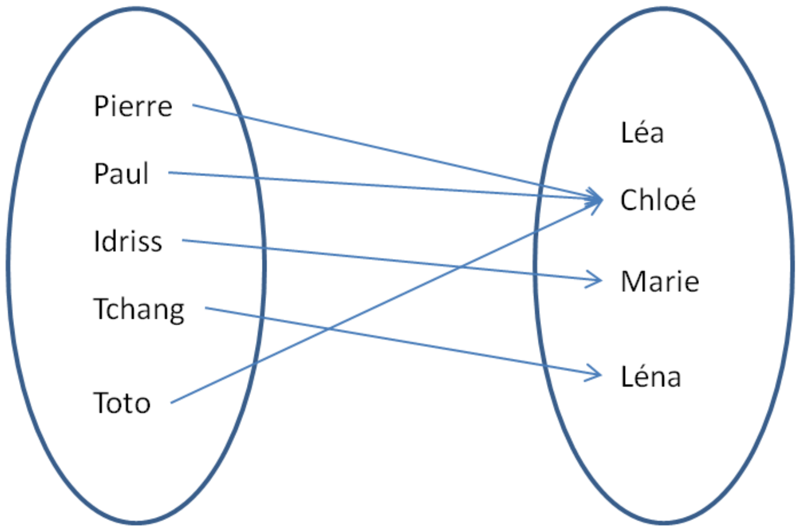
$$D = \{\text{Pierre}, \text{Paul}, \text{Idriss}, \text{Tchang}, \}$$

Et pour les deux autres exemples :

$$D_{f^+} = D_{f^-} = [-1\,;1]$$

III : l'application

Une application est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble de départ tout entier. Ainsi, la fonction associée à ce diagramme est une application :



A noter que toute fonction f permet de définir une application en restreignant son ensemble de départ à son domaine de définition D_f. On l'appelle alors restriction de f à D_f et on la note f_{D_f}

Ainsi $f^+{}_{[-1\,;1]}$ et $f^-{}_{[-1\,;1]}$ sont des applications.

D’autres exemples :

<u>La fonction carré</u> :

$$f(x) = x^2$$

f définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais également de tout sous ensemble de $\mathbb{R}$ dans tout sous ensemble de $\mathbb{R}$

<u>La fonction racine carré</u> :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

f définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais une application de $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

<u>La fonction inverse</u> :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

f définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$

<u>IV : l’injection</u>

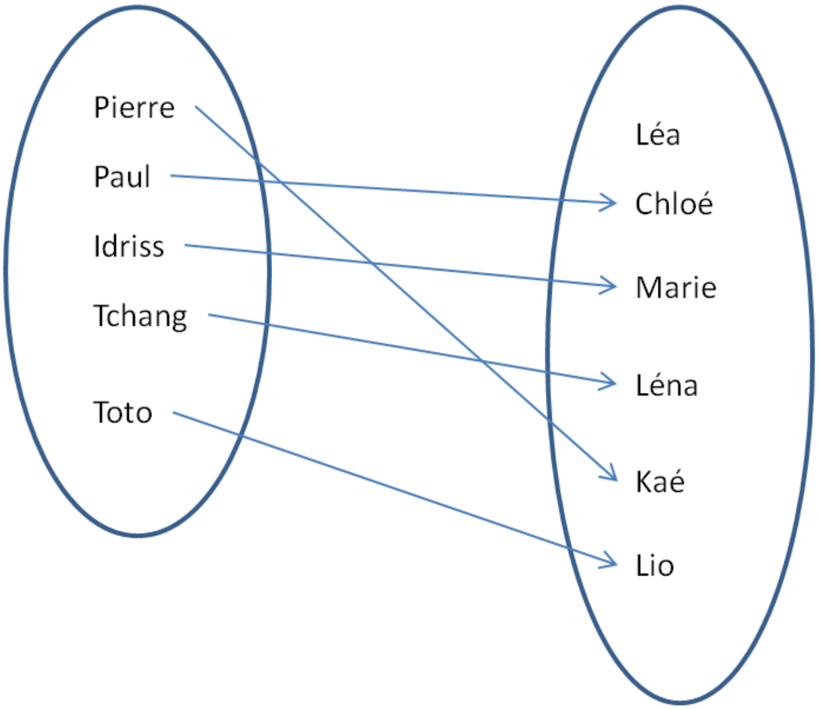
Une injection est une application $f = (\mathbb{E}\,,\mathbb{F}\,,\mathbb{G})$ telle que deux éléments de l’ensemble de départ ne puissent avoir une même image, autrement dit :

$$\boxed{\forall\,(x\,,x') \in \mathbb{E}^2 :\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$$

Soit encore, sous forme contraposée, permettant souvent un raisonnement plus aisé :

$$\boxed{\forall\,(x\,,x') \in \mathbb{E}^2 :\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

Voilà un exemple d’injection avec un diagramme en patates :



A noter que l'injection traduit que deux flèches ne peuvent aboutir sur la même image.

La fonction carré définit une injection de $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction racine carré définit une injection de $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction inverse définit une injection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

Un exemple est très parlant pour justifier le terme d'injection, c'est l'injection canonique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : f(n) = n$$

Un cas très important d'injection est celui –ci :

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone sur un ensemble $\mathbb{E}$ définit une injection de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$

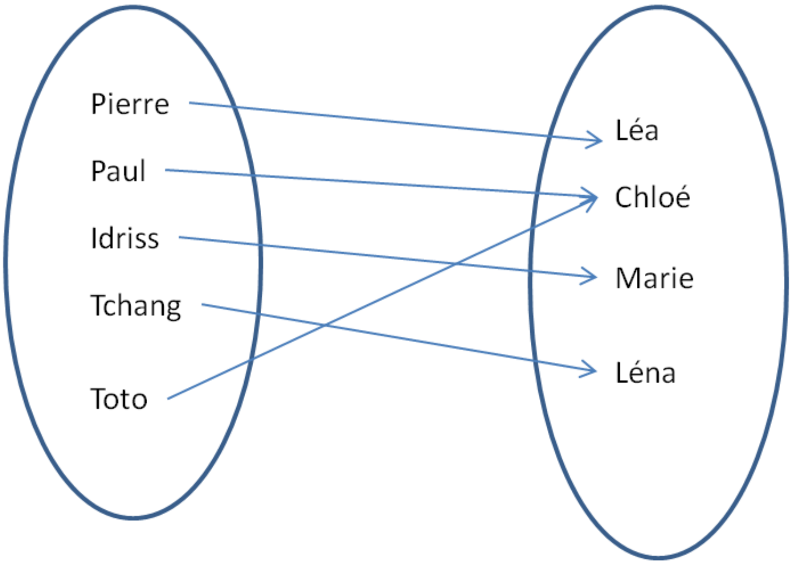
V : la surjection

Une surjection est une application $f = (\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G})$ telle que l'image de l'ensemble de départ soit l'ensemble d'arrivée, autrement dit :

$$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{F} :\ \exists\, x \in \mathbb{E} : y = f(x)}$$

Cela revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Voici un exemple avec des patates :



Toute application f définit une surjection si on restreint son ensemble d'arrivée à son ensemble image $f(\mathbb{E})$. Ainsi :

La fonction carré définit une surjection de $\mathbb{R}$ dans $[0\,;\,+\infty[$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction racine carré définit une surjection de $[0\,;\,+\infty[$ dans $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction inverse définit une surjection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Un exemple est très parlant pour justifier le terme de surjection, c'est la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\ : f(p) = \ p$$

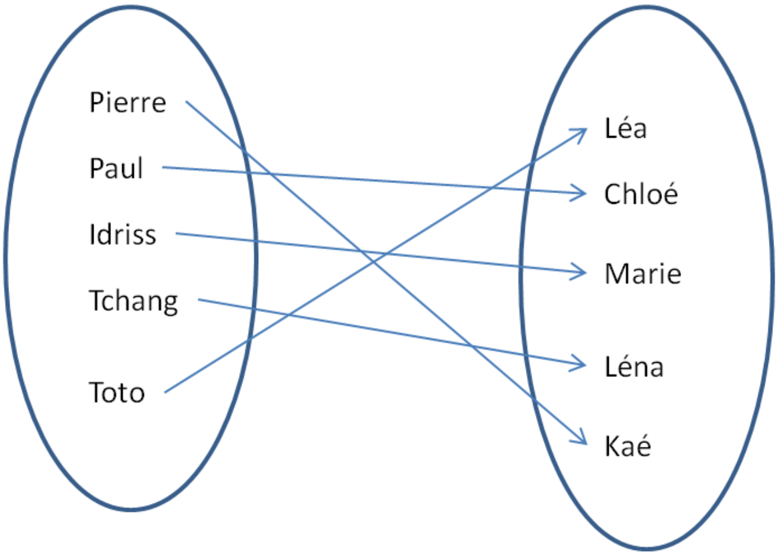
VI : la bijection

Une bijection est une application $f\ = (\mathbb{E}\,, \mathbb{F}\,, \mathbb{G})$ qui est à la fois une injection et une surjection, autrement dit :

$$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{F} :\ \exists\,!\ x\ \in\ \mathbb{E} : y = f(x)}$$

Cela revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un et seul antécédent.

Voici un exemple avec des patates :



La fonction carré définit une bijection de $[0\,;\ +\infty[$ dans $[0\,;\ +\infty[$, mais aussi de $[-\infty\,;\ 0[$ dans $[0\,;\ +\infty[$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction racine carré définit une bijection de $[0\,;\ +\infty[$ dans $[0\,;\ +\infty[$.

La fonction inverse définit une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Un cas très important en analyse est celui-ci :

Toute fonction $\boldsymbol{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone sur un ensemble $\mathbb{E}$ définit une bijection de $\mathbb{E}$ dans $\boldsymbol{f}(\mathbb{E})$.

Si de plus $\mathbb{E}$ est un intervalle et que f est continue sur $\mathbb{E}$, nous aurons le fait que $f(\mathbb{E})$ est un intervalle, nous y reviendrons au fichier consacré aux fonctions continues, et cela constituera un théorème dit de la bijection et des valeurs intermédiaires fort utile dans la résolution d'équations.

Un autre exemple important est celui des **permutations** d'un ensemble à n éléments comme celui qualifié de **groupe symétrique $\boldsymbol{S_n}$** :

$$S_n = \{1\,;2\,;3\ \ldots;n\}$$

Prenons l'exemple de

$$S_4 = \{1\,;2\,;3\,;4\}$$

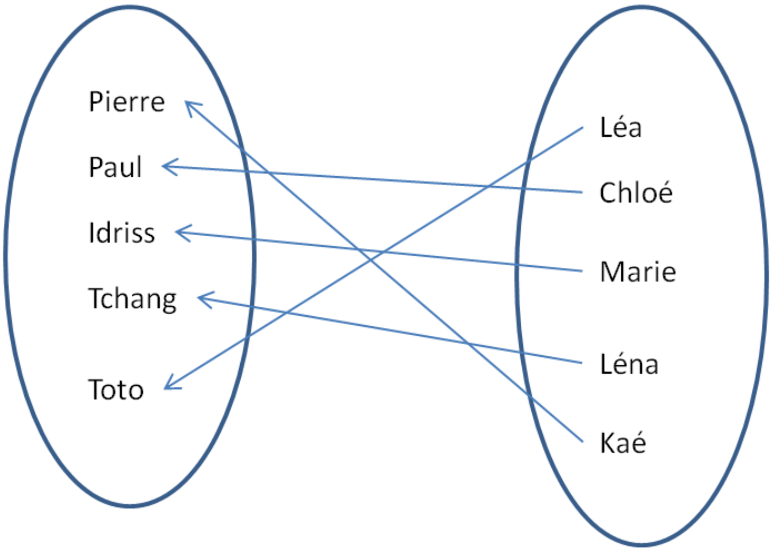
Une permutation de S_4 est une bijection de S_4 dans lui-même, définie par un tableau de correspondances, par exemple :

1	2	3	4
2	4	1	3

VII : Applications réciproques

Etant donné une bijection $f = (\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G})$ la relation $g = (\mathbb{F}, \mathbb{E}, \mathbb{G}')$ où $\mathbb{G}' = \{(y, x) \in \mathbb{F} \times \mathbb{E} : (x, y) \in \mathbb{G}\}$ est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}

Voici la réciproque de la bijection prise en exemple précédemment avec des patates



<u>**Exemples d'applications réciproque**</u> :

1) <u>Fonction carré</u> :

Considérons la fonction carré, restreinte à $[0\,;\,+\infty[$ dans l'ensemble de départ et à $[0\,;\,+\infty[$ dans l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire, précisément :

$$f = ([0\,;\,+\infty[\ \ , [0\,;\,+\infty[\ \ , \mathbb{G})$$

$$\mathbb{G} = \{(x\,, y) \in [0\,;\,+\infty[^2\ :\ y = x^2\}$$

La réciproque de cette fonction est :

$$f^{-1} = ([0\,;\,+\infty[\ \ , [0\,;\,+\infty[\ \ , \mathbb{G}')$$

$$\mathbb{G}' = \left\{(y\,, x) \in [0\,;\,+\infty[^2 :\ x = \sqrt{y}\right\}$$

Autrement dit, écrit plus simplement :

$$\forall\, y \in [0\,;\,+\infty[\ :\ f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

La bijection définie par la fonction carré de $[0\,;\,+\infty[$ dans $[0\,;\,+\infty[$ est donc la bijection définie par la fonction racine carré sur les mêmes ensembles.

1) Fonction inverse :

Considérons la fonction inverse, restreinte à $\mathbb{R}^*$ dans l'ensemble de départ et à $\mathbb{R}^*$dans l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire, précisément :

$$f = (\mathbb{R}^* \quad , \mathbb{R}^* \quad , \mathbb{G})$$

$$\mathbb{G} = \left\{(x\,, y) \in \mathbb{R}^{*2} \ : \ y = \frac{1}{x}\right\}$$

La réciproque de cette fonction est :

$$f^{-1} = (\mathbb{R}^*, \mathbb{R}^* \quad , \mathbb{G}')$$

$$\mathbb{G}' = \left\{(y\,, x) \in \mathbb{R}^* : \ x = \frac{1}{y}\right\}$$

Autrement dit, écrit plus simplement :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^* \ : \ f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

L'application inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est donc sa propre réciproque.

Propriétés fondamentales des applications réciproque

Si $f^{-1} = (\mathbb{F}\,, \mathbb{E}\,, \mathbb{G}')$ est l'application réciproque de $f = (\mathbb{E}\,, \mathbb{F}\,, \mathbb{G})$ alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

$$\forall\, y \in \mathbb{F} : f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

Dans les exemples étudiés, cela donne des propriétés bien connues :

$$\forall\, x \in [0\,;\ +\infty[\ : \sqrt{x^2} = x$$

$$\forall\, y \in [0\,;\ +\infty[\ : \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Mais cela donne également pour les fonctions exponentielle et logarithme népérien qui sont réciproques :

$$\forall\ x \in \,]0\ ;\ +\infty[\ : \exp\,(Ln(x)) = x$$

$$\forall\ y \in \mathbb{R} : Ln(\exp(y)) = y$$

Nous verrons que les fonctions trigonométriques $Sin(x); Cos(x), Tan(x)$ permettent également de définir des applications réciproques.