Mécanique des fluides visqueux

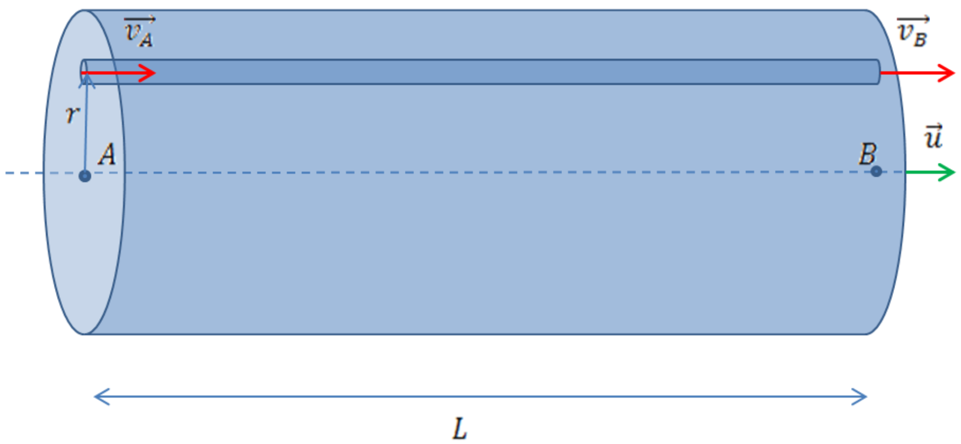
Loi de Poiseuille

Considérons un fluide incompressible mais visqueux comme le sang ou de l'huile s'écoulant de façon stationnaire dans une conduite dans un régime non tourbillonnaire.

I Cas d'une conduite cylindrique droite horizontale

Les dimensions de la conduite sont supposées telles qu'on peut négliger la différence de pression dans une section donnée entre partie supérieure et partie inférieure. C'est le cas des artères du corps humain par exemple ou des conduites rencontrées couramment.

a) Conservation du débit à travers chaque section droite



Considérons un tube de courant de section d'entrée infinitésimale dS_A par laquelle le fluide entre avec un vecteur-vitesse $\overrightarrow{v_A} = v_A\,\vec{u}$ pour ressortir à une distance $L = AB$ par une section dS_B avec un vecteur-vitesse $\overrightarrow{v_B} = v_B\,\vec{u}$. La conservation du débit d^2q à travers cette section se traduit par l'équation :

$$d^2q = v_A\,dS_A = v_B\,dS_B$$

Mais la forme cylindrique de la conduite impose :

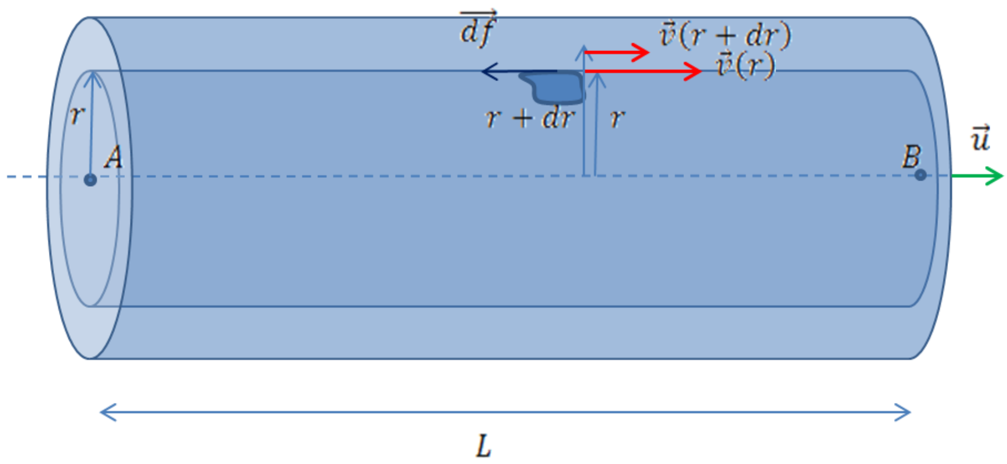
$$dS_A = dS_B$$

Il en résulte :

$$\boxed{v_A = v_B}$$

Autrement dit, **la vitesse se conserve le long d'une ligne de courant**. Les différentes sections de conduite présente donc un même profil de vecteurs-vitesse. La symétrie de révolution permet alors de décrire ce profil par une fonction $v(r)$.

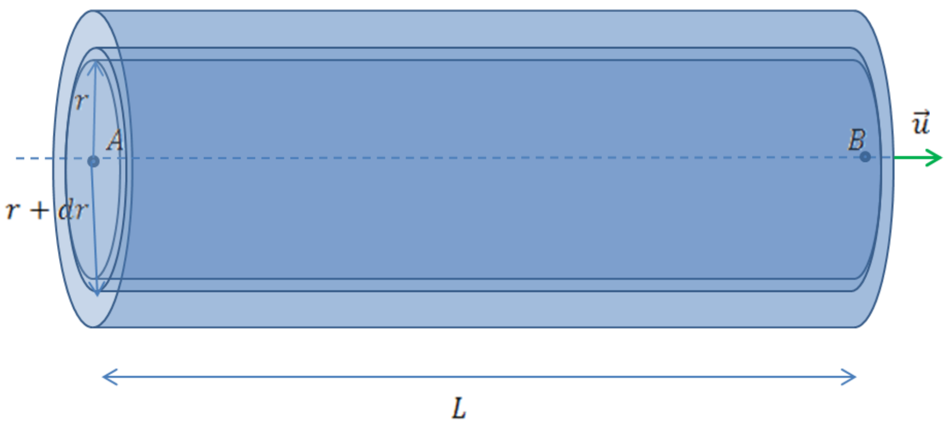
b) Force de frottement visqueux



Considérons une petite surface élémentaire d^2S sur un cylindre de même axe $(A,\vec{u})$ que la conduite et de rayon r strictement inférieur au rayon R de la conduite. Le milieu extérieur à ce cylindre exerce sur ce dernier au niveau de cette surface de contact une force tangentielle de frottement due au différentiel de vitesse entre filets de fluide voisins, de la forme :

$$\boxed{d\vec{f} = \eta \; \frac{dv(r)}{dr} \; d^2S \; \vec{u}}$$

c) Bilan d'énergie sur un cylindre annulaire.



Considérons un cylindre annulaire d'axe $(A,\vec{u})$ et de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r+dr$ contenu dans la conduite, dr étant infinitésimal. Faisons un bilan de variation d'énergie totale du fluide situé dans ce cylindre, c'est-à-dire interne plus mécanique macroscopique entre deux instants t et $t+dt$ infiniment proches.

Prenons pour hypothèse que l'énergie interne ne varie pas, le fluide conservant ses caractéristiques de température et sa composition molaire. L'énergie potentielle de pesanteur ne variant pas de même que l'énergie cinétique d'ensemble, il n'y a donc pas de variation d'énergie totale.

De plus, si on suppose que la température du fluide reste uniforme, ce dernier n'échange pas de chaleur mais seulement du travail avec l'extérieur. Désignons par :

$\delta W(P_A) =$ travail des forces de pression à la section amont du cylindre annulaire

$\delta W(P_B) =$ travail des forces de pression à la section aval

$\delta W(\vec{f}) =$ travail des forces de frottements sur la surface latérale extérieure et la surface latérale intérieure du cylindre annulaire

Nous avons alors :

$$\delta W(P_A) + \delta W(P_B) + \delta W(\vec{f}) = 0$$

Notons ensuite que la surface de la base du cylindre annulaire est au premier ordre :

$$d^1S = \pi\,(r+dr)^2 - \pi\,r^2 = d(\pi\,r^2) = 2\,\pi\,r\,dr$$

On en déduit :

$$P_A \times 2\,\pi\,r\,dr\;\;v(r)\,dt - P_B \times 2\,\pi\,r\,dr\;\;v(r)\,dt + \eta\;\frac{dv(r+dr)}{dr} \times 2\,\pi\,(r+dr)\,L\,v(r)\,dt - \eta\;\frac{dv(r)}{dr} \times 2\,\pi\,r\,L\,v(r)\,dt = 0$$

Soit en simplifiant par $2\,\pi\, v(r)\, dt$:

$$(P_A - P_B)\ r\, dr\ = -\eta\, L\ \left((r+dr)\frac{dv}{dr}(r+dr) - \ \frac{dv}{dr}(r) \right)\ = 0$$

$$(P_A - P_B)\, d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -\eta\, L\, d\left(r\ \frac{dv}{dr}(r)\right)$$

Par intégration, il vient :

$$(P_A - P_B)\ \frac{r^2}{2} = -\eta\, L\ \ r\ \frac{dv}{dr}(r) + cste$$

Or en $r = 0$ on a par symétrie :

$$\frac{dv}{dr}(0) = 0$$

Donc la constante d'intégration est nulle et :

$$\boxed{P_A - P_B = -2\,\eta\ \frac{L}{r}\frac{dv}{dr}(r)}$$

Cette quantité est appelée perte de charge entre les sections A et B

d) <u>Autre façon d'obtenir la perte de charge</u> :

Dans le cas d'une conduite droite comme celle que nous étudions, nous pouvons aussi appliquer la loi de Newton au fluide contenu dans un cylindre d'axe $(A, \vec{u})$ et de rayon r. En notant que le vecteur-accélération du centre de gravité de ce système est nul à tout instant, nous pouvons écrire que la somme des forces extérieures agissant sur ce cylindre est nulle soit :

$$P_A\ \times\ \pi\, r^2 - P_B\ \times \pi\, r^2 + \eta\ \ \frac{dv}{dr}(r) \times 2\,\pi\, r\, L = 0$$

Et on retrouve bien, après simplifications, la formule précédente de façon plus simple, mais dans le cas d'une conduite non droite, il vaudra mieux raisonner avec un bilan d'énergie.

e) <u>Profil de vitesse dans une section droite</u>

La formule précédente peut être intégrée selon un rayon :

$$\frac{dv}{dr}(r) = -\frac{P_A - P_B}{2\,\eta\,L}\,r$$

$$v(r) = -\frac{P_A - P_B}{2\,\eta\,L}\frac{r^2}{2} + cste$$

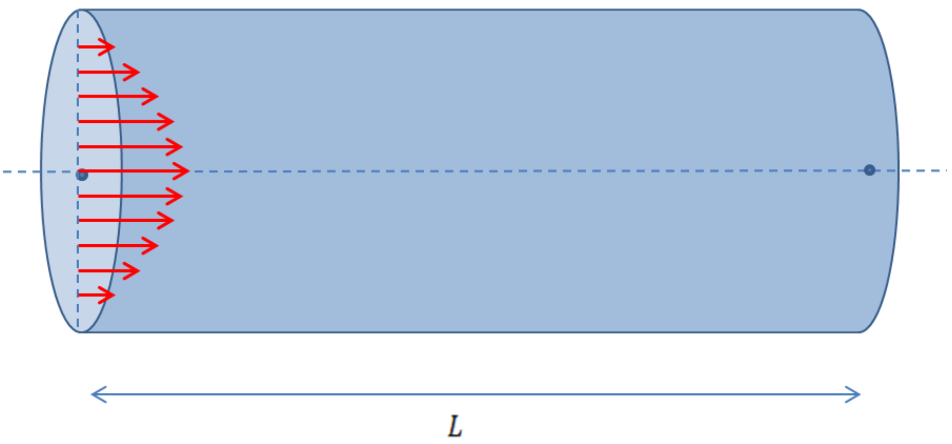
La constante se détermine par condition aux limites :

$$v(R) = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{v(r) = \frac{P_A - P_B}{4\,\eta\,L}\,(R^2 - r^2)}$$

Les extrémités des vecteurs-vitesse dessinent donc un paraboloïde d'axe $(A, \vec{u})$ dans une section droite. Nous avons représenté sur la figure une coupe de ce paraboloïde par un plan passant par son axe.



f) <u>Relation débit volumique-perte de charge- Notion de résistance hydraulique</u>

Le débit à travers une section annulaire de centre A, de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$ est :

$$d^1q(r) = 2\,\pi\, r\, dr\, v(r)$$

Le débit à travers une section droite de conduite est alors :

$$Q = \int_0^R d^1q(r) = \int_0^R 2\,\pi\, r\, v(r) dr$$

$$= 2\,\pi \frac{P_A - P_B}{4\,\eta\, L} \int_0^R (r\, R^2 - r^3) dr$$

$$= \pi \frac{P_A - P_B}{2\,\eta\, L} \left[\frac{r^2}{2}\, R^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \pi \frac{P_A - P_B}{2\,\eta\, L} \times \frac{R^4}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{Q = \frac{\pi\, R^4}{8\,\eta\, L}\,(P_A - P_B)}$$

Cette relation, qualifiée de **loi de Poiseuille**, se met sous une forme analogue à celle liant intensité et différence de potentiel en électricité :

$$\boxed{P_A - P_B = R_h\, Q}$$

Où R_h est qualifiée de résistance hydraulique et donnée par :

$$\boxed{R_h = \frac{8\,\eta\, L}{\pi\, R^4}}$$

Cette relation s'apparente à celle donnée pour un résistor en électricité :

$$V_A - V_B = R\, I$$

Le débit correspond à l'intensité, la pression au potentiel électrostatique, et la différence de pression à la tension électrique.