Familles libres de fonctions de référence

1) Polynômes

Théorème :

Soit $\boldsymbol{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $\boldsymbol{P}$ un polynôme à coefficients réels (ou complexes) vérifiant :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{J} : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

alors $\boldsymbol{P}$ est le polynôme nul (tous ses coefficients sont nuls)

Cette propriété se traduit par le fait que la famille de polynômes $(\mathbf{1}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}, \dots, \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{n}})$ est une famille libre de l'espace vectoriel formé par les fonctions de $\boldsymbol{J}$ dans $\mathbb{R}$

Preuve : par récurrence sur le degré de P, en prenant pour convention que les polynômes constants sont de degré 0 y compris le polynôme nul.

Formulons le prédicat $Q(n)$ suivant, pour $n \in \mathbb{N}$:

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et P_n un polynôme de degré n à coefficients réels (ou complexes) vérifiant :

$$\forall x \in J : P_n(x) = 0$$

alors P_n est le polynôme nul (tous ses coefficients sont nuls)

Initialisation : pour $n = 0$

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et P_0 un polynôme de degré 0 donc une constante notée a_0, vérifiant :

$$\forall x \in J : P_0(x) = 0$$

alors :

$$a_0 = 0$$

donc $Q(0)$ est vrai

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vrai, alors :

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et P_{n+1} un polynôme de degré $n+1$ donc vérifiant :

$$\forall x \in J : \; P_{n+1}(x) = 0$$

On en déduit en dérivant :

$$\forall x \in J : \; P'_{n+1}(x) = 0$$

donc P'_{n+1} est un polynôme de degré n vérifiant l'hypothèse de récurrence, d'où :

P'_{n+1} est le polynôme nul.

Posons :

$$P_{n+1}(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \cdots + a_{n+1}\, X^{n+1}$$

alors :

$$P'_{n+1}(X) = a_1\, X + 2\, a_2\, X + \cdots + (n+1)\, a_{n+1}\, X^n$$

donc :

$$a_1 = 2\, a_2 = \cdots = (n+1)\, a_{n+1} = 0$$

d'où , en reportant dans $P_{n+1}(x) = 0$

$$a_0 = \; a_1 = a_2 = \cdots = \; a_{n+1} = 0$$

La propriété $Q(n+1)$ est donc vraie, ce qui achève la démonstration

<u>Remarque</u> :

Cette propriété peut s'obtenir par voie algébrique en établissant au préalable qu'un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines distinctes. Mais l'avantage de la méthode présentée ici est son extension à des familles plus générales, comme nous allons le montrer avec celles qui suivent.

1) <u>Polynômes-exponentielles</u>

<u>Théorème</u> : m étant un entier naturel non nul

Soit $\boldsymbol{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \dots, \boldsymbol{k_m})$ un m-uplet de réels ou de complexes tous distincts, $(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \dots, \boldsymbol{P_m})$ un m-uplet de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tels que :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{J} :\ \boldsymbol{P_1(x)\, e^{k_1 x} + P_2(x)\, e^{k_2 x} + \cdots + P_m(x)\, e^{k_m x} = 0}$$

Alors tous les polynômes $\boldsymbol{P_i}$ sont des polynômes nuls

Cette propriété se traduit par le fait que la famille de fonctions $\left(\boldsymbol{x^i\, e^{k_j x}}\right)_{\substack{0 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ est une famille libre de l'espace vectoriel formé par les fonctions de $\boldsymbol{J}$ dans $\mathbb{R}$

<u>Preuve</u> : par double récurrence en commençant par une récurrence sur m

Désignons par $Q(m)$ le prédicat défini dans l'énoncé du théorème.

<u>Initialisation</u> : pour $m = 1$

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, k_1 un réel ou complexe, P_1 un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tels que :

$$\forall x \in J :\ P_1(x)\, e^{k_1 x} = 0$$

alors :

$$\forall x \in J :\ P_1(x) = 0$$

D'après le théorème qui précède, P_1 est le polynôme nul donc $Q(1)$ est vraie

<u>Hérédité</u> :

Soit $m \geq 1$ tel que $Q(m)$ soit vraie, montrons que $Q(m+1)$ est vraie.

Soit donc J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1})$ un m+1-uplet de réels ou de complexes, $(P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1})$ un m-uplet de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tels que :

$$\forall x \in J :\ P_1(x)\, e^{k_1 x} + P_2(x)\, e^{k_2 x} + \cdots + P_m(x)\, e^{k_m x} + P_{m+1}(x)\, e^{k_{m+1} x} = 0$$

Nous allons montrer que tous le polynômes P_i sont nuls. Si P_{m+1} est nul, c'est l'hypothèse de récurrence qui le dit, sinon, nous allons le montrer par récurrence sur le degré n de P_{m+1} autrement dit, nous incorporons un raisonnement par récurrence dans un autre raisonnement par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$

P_{m+1} est alors une constante non nulle que nous noterons a. Nous avons alors :

$$\forall x \in J :\ P_1(x)\, e^{k_1\, x} + P_2(x)\, e^{k_2\, x} + \cdots + P_m(x)\, e^{k_m\, x} + a\, e^{k_{m+1}\, x} = 0$$

On en déduit par dérivation :

$$\begin{aligned}\forall x \in J :\ &\big(P'_1(x) + k_1\, P_1(x)\big)\, e^{k_1\, x} + \big(P'_2(x) + k_2\, P_2(x)\big)\, e^{k_2\, x} + \cdots \\ &+ \big(P'_m(x) + k_m\, P_m(x)\big)\, e^{k_m\, x} + a\, k_{m+1}\, e^{k_{m+1}\, x} = 0\end{aligned}$$

En soustrayant cette dernière relation à la précédente préalablement multipliée par k_{m+1}, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in J :\ &\big(P'_1(x) + (k_1 - k_{m+1})\, P_1(x)\big)\, e^{k_1\, x} + \big(P'_2(x) + (k_2 - k_{m+1})\, P_2(x)\big)\, e^{k_2\, x} + \cdots \\ &+ \big(P'_m(x) + (k_m - k_{m+1})\, P_m(x)\big)\, e^{k_m\, x} = 0\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence s'applique et conduit à

$$\begin{aligned}\forall x \in J :\ &P'_1(x) + (k_1 - k_{m+1})\, P_1(x) = P'_2(x) + (k_2 - k_{m+1})\, P_2(x) = \cdots \\ &= P'_n(x) + (k_n - k_{m+1})\, P_n(x) = 0\end{aligned}$$

Or pour chaque tout indice i de $\{1,2,\dots,n\}$ $P'_i(x) + (k_i - k_{m+1})\, P_i(x)$ est un polynôme de même degré que P_i. On en déduit que P_i est le polynôme nul, puis par report que a, donc P_{m+1}, est nul.

Hérédité :

Soit un entier $n \geq 0$ te que la propriété soit vraie au rang n donc pour un polynôme quelconque P_{m+1} de degré n. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$.

Soit donc un polynôme quelconque P_{m+1} de degré $n + 1$ tel que :

$$\forall x \in J :\ P_1(x)\, e^{k_1\, x} + P_2(x)\, e^{k_2\, x} + \cdots + P_m(x)\, e^{k_m\, x} + P_{m+1}(x)\, e^{k_{m+1}\, x} = 0$$

En dérivant, on déduit :

$$\begin{aligned}\forall x \in J :\ &\big(P'_1(x) + k_1\, P_1(x)\big)\, e^{k_1\, x} + \big(P'_2(x) + k_2\, P_2(x)\big)\, e^{k_2\, x} + \cdots \\ &+ \big(P'_m(x) + k_m\, P_m(x)\big)\, e^{k_m\, x} + \big(P'_{m+1}(x) + k_{m+1}\, P_{m+1}(x)\big)\, e^{k_{m+1}\, x} = 0\end{aligned}$$

En soustrayant cette dernière relation à la précédente préalablement multipliée par k_{m+1}, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in J :\ &\big(P'_1(x) + (k_1 - k_{m+1})\, P_1(x)\big)\, e^{k_1\, x} + \big(P'_2(x) + (k_2 - k_{m+1})\, P_2(x)\big)\, e^{k_2\, x} + \cdots \\ &+ \big(P'_m(x) + (k_m - k_{m+1})\, P_2(x)\big) + P'_{m+1}(x)\, e^{k_{m+1}\, x} = 0\end{aligned}$$

P'_m étant un polynôme de degré n, l'hypothèse de récurrence s'applique et conduit à :

$$\forall x \in J : \; P'_1(x) + (k_1 - k_{m+1})\, P_1(x) = P'_2(x) + (k_2 - k_{m+1})\, P_2(x) = \cdots$$
$$= P'_n(x) + (k_n - k_{m+1})\, P_n(x) = P'_m(x) = 0$$

On en déduit comme précédemment que tous les P_i sont nuls pour i dans $\{1,2,\dots,n\}$ et que P_{m+1} est un polynôme constant puis, par report, qu'il est nul, ce qui achève la démonstration.