Exponentielles et Logarithmes

Il existe de nombreux phénomènes physiques où une grandeur y varie en fonction d'une grandeur x de telle sorte que lorsque x s'accroît d'une valeur T, y se trouve divisée par 2. Ainsi en est il de la loi de décroissance radioactive, de la décharge d'un condensateur. Ceci conduit naturellement à chercher une fonction mathématique f(x) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = k\, f(x)$$

Où $k > 0$ et

Ce problème serait alors résolu si on trouvait des fonctions vérifiant pour tous x et y réels :

$$\boxed{f(x+y) = f(x)\, f(y)}$$

On note alors que les fonctions puissances d'un nombre positif donné à exposant variable c'est-à-dire de la forme $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ ont cette propriété mais seulement pour x et y entiers relatifs et même rationnels .

$x^{\sqrt{2}}$ n'a pour l'instant en effet pas de sens.

Il conviendrait alors de construire de telles fonctions qui prolongent la définition de a^x aux nombres irrationnels, et qui soient dérivables sur $\mathbb{R}$.

Afin de construire de telles fonctions, supposons qu'elles existent et tentons d'en déduire des propriétés concernant leur dérivée.

Soit donc une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{gathered} f(x+y) = f(x)\, f(y) \\ f(0) = 1 \end{gathered}}$$

Evaluons alors le taux d'accroissement de f entre x et x +h :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)\, f(h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)\ \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$= f(x) \ \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

En passant à la limite pour x fixé et h tendant vers 0 on a donc :

$$\boxed{f'(x) = f(x)\, f'(0)}$$

En notant k le nombre $f'(0)$, on voit que f est donc solution d'une équation dite différentielle du premier ordre de la forme :

$$\boxed{f'(x) = k \ f(x)}$$

Rappelons que f est sensée prolonger de manière « continue » la définition des puissances rationnelles d'un nombre strictement positif. f est donc sensée être strictement positive et strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Elle est donc sensée admettre une réciproque g définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La réciproque g de f vérifie donc :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \ g\,(f(x)) = x}$$

En dérivant cette relation il vient :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \ g'(f(x))\, f'(x) = 1}$$

Soit encore :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad g'(f(x)) = \frac{1}{k\, f(x)}}$$

Finalement en posant $y = f(x)$:

$$\boxed{\forall\, y \in]0;+\infty[\quad g'(y) = \frac{1}{k\, y}}$$

Autrement dit la réciproque est une primitive d'une fonction simple sur $]0;+\infty[$.

Il y a donc deux voies pour construire des fonctions ayant la propriété des puissances et appelées exponentielles. La première consiste à chercher des solutions à l'équation différentielle vérifiée par f. La seconde consiste à construire les réciproques appelées logarithmes en cherchant des solutions à l'équation vérifiée par g.

Nous allons donc envisager le problème sous les deux angles.

I Construction des fonctions exponentielles

Le problème se pose ainsi : Trouver une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\, x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = k\ f(x) \\ f(0) = 1 \end{array}}$$

1) exponentielle de base e :

Commençons par le cas où k = 1.

Cherchons f sous forme d'une « sorte de polynôme » nous allons voir en quel sens.

Puisque f(0) = 1, ce polynôme doit avoir pour terme constant 1.Soit :

$$f(x) = 1 + \cdots.$$

$$f'(x) = f(x) = 1 + \cdots$$

Donc :

$$f(x) = 1 + x + \cdots.$$

$$f'(x) = 1 + x + \cdots$$

Donc

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ldots.$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ldots$$

Donc

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \ldots.$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

Et ainsi de suite. On obtient ainsi :

$$\boxed{f(x) = \lim_{n \to +\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots . + \frac{x^n}{n!}}$$

f(x) se présente donc pour x fixé comme limite d'une suite dont il faut s'assurer qu'elle converge. Ce point fait partie de l'étude des séries entières. La preuve de la convergence se fait pour $x > 0$ en utilisant le critère de Dalembert (voir fiche à ce sujet) mais pour $0 < x < 1$ une preuve peut être obtenue facilement en notant que la suite est croissante et majorée comme suit :

$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots . + \frac{x^n}{n!} \leq 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \leq \frac{1}{1-x}}$$

Nous allons alors sans utiliser les résultats sur les séries entières la dérivabilité de f(x) sur $\mathbb{R}$. Mais au préalable nous allons établir que f vérifie la propriété pour laquelle nous l'avions construite à savoir :

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)$$

Nous avons d'une part :

$$\frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{n} x^n\, y^{n-k} = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{\substack{0 \leq n+m \leq N \\ 0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}}$$

D'autre part :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{N} \frac{y^m}{m!} = \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{N} \frac{y^m}{m!} - \sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}}$$

L e premier membre tend vers f(x+y) quand N tend vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers f(x) f(y), il reste donc à montrer que le deuxième terme tend vers 0.Notons pour cela :

$$\left| \sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \right| \leq \sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq N}} \frac{|x|^n}{n!} \frac{|y|^m}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2N} \frac{(|x|+|y|)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(|x|+|y|)^k}{k!}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2N} \frac{(|x|+|y|)^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(|x|+|y|)^k}{k!} = f(|x|+|y|)$$

Donc le majorant du deuxième terme tend vers 0 d'où le deuxième terme également.

On en déduit alors la relation cherchée :

$$\boxed{f(x+y) = f(x)\, f(y)}$$

Nous allons pouvoir alors montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en utilisant cette propriété. Formons en effet le taux d'accroissement de f entre x et x + h :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)\,f(h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x) \quad \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

Il suffit donc de montrer que f est dérivable en 0. Or :

$$\frac{\sum_{n=0}^{N} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} = \sum_{n=1}^{N} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1 + h \sum_{n=2}^{N} \frac{h^{n-2}}{n!}$$

Et par passage à la limite quand N tend vers l'infini et pour h fixé :

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} = 1 + h \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 + h \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!}}$$

Et pour $|h| < 1$:

$$\left| h \sum_{n=2}^{N} \frac{h^{n-2}}{n!} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{N} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \leq |h| \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!} \leq |h| \; f(1)$$

Faisons tendre N vers l'infini pour h fixé. Par comparaison il vient :

$$\left| h \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = |h| \; f(1)$$

La quantité majorante tendant vers 0 quand h tend vers 0, on en déduit :

$$\lim_{h \to 0} h \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!} = 0$$

D'où :

$$\boxed{f'(0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1}$$

Et :

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)$$

Nous allons alors montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \geq 0$, cela est évident par passage à la limite car :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \geq 1$$

Pour $x < 0$, il suffit de noter que :

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x)\ f(-x)$$

Donc f(x) et f(-x) sont inverses l'un de l'autre et donc de même signe.

Il en découle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Examinons alors les limites en plus et moins l'infini.

Notons pour cela, par une récurrence évidente, que :

$$f(2\ n) = f(2 + 2 + \cdots + 2) = f(2)f(2) \ldots f(2) = f(2)^n$$

et que :

$$f(2) > 1$$

il en découle :

$$\lim_{n \to +\infty} f(2\ n) = \lim_{n \to +\infty} f(2)^n = +\infty$$

f étant strictement croissante il en résulte :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

D'autre part :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(-x)} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{f(X)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0^+$$

Reste à voir si f prolonge la définition d'une fonction de la forme a^x pour $a>0$.

Posons :

$$e = f(1) = \lim_{n\to+\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} \dots . + \frac{1}{n!}$$

Dont une valeur approchée à 0,01 près est 2,72.

Alors pour n entier naturel :

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1)^n = e^n$$

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

et pour m entier naturel non nul et n entier relatif :

$$f(n) = f\left(m\ \frac{n}{m}\right) = f(\frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \cdots \frac{n}{m}) = f\left(\frac{n}{m}\right)^m$$

D' où

$$f\left(\frac{n}{m}\right)^m = e^n$$

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}}$$

Autrement dit pour x rationnel :

$$f(x) = e^x$$

On convient de noter f(x) sous cette forme pour tous les réels x, c'est-à-dire en y incluant les irrationnels, compte tenu des propriétés de f qui s'apparentent à celle des puissances, et que nous résumons ici :

Pour tout couple (x,y) de réels :

$$f(x + y) = f(x)\ f(y)$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(0) = 1$$

Nous verrons, après avoir définie les exponentielles en base a (a>0) que l'on peut également ajouter une propriété propre aux puissances :

$$f(x\,y) = f(x)^y$$

Ceci permettra d'utiliser le symbole e^x comme si on avait affaire à la puissance d'un nombre e, ce qui n'est le cas que pour les nombres rationnels. Les propriétés se réécrivent d'une manière simple à mémoriser :

$$e^0 = 1$$

$$e^{x+y} = e^x\, e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{x\,y} = (e^x)^y$$

Cherchons maintenant s'il existe d'autres solutions que celle que nous venons de construire eu problème :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = f(x)$$

$$f(0) = 1$$

Notons que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$$

$$<=> \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - f(x) = 0$$

$$<=> \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x)e^{-x} - e^{-x} f(x) = 0$$

$$<=> \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (f(x)e^{-x})' = 0$$

$$<=> \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x)e^{-x} = c$$

$$<=> \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = c\ e^x$$

Donc notre problème a une solution unique, puisque $f(0) = 1$ impose à la constante c de valoir 1.

Passons maintenant à l'exponentielle en base a quelconque

2)exponentielle de base $a > 0$:

Reprenons le problème initial, à savoir , trouver une fonction f vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = k \, f(x)$$
$$f(0) = 1$$

Ce problème se résout d'une manière totalement analogue à celui pour lequel $k = 1$ et conduit pour x réel à une solution unique définie par :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} 1 + (k\,x) + \frac{(k\,x)^2}{2} + \frac{(k\,x)^3}{3!} \dots . + \frac{(k\,x)^n}{n!}$$

Autrement dit :

$$f(x) = e^{k\,x}$$

Et en posant $a = f(1) = e^k$ on a pour x rationnel :

$$f(x) = a^x$$

Il est aisé de constater que f a les mêmes propriétés que e^x ce qui permet d'étendre la notation précédente aux nombres réels. Les propriétés se résument alors ainsi :

$$a^0 = 1$$
$$a^{x+y} = a^x\,a^y$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$a^{x\,y} = (a^x)^y$$

Notons que l'extension de la notation conduit définir f à partir de e^x pour x réel sous forme :

$$a^x = e^{k\,x}$$

Et donc pour k et x réels quelconques :

$$(e^k)^x = e^{k\,x}$$

Ce qui achève de démontrer une propriété laissée précédemment en suspend et permet de démontrer la dernière propriété à savoir :

$$a^{x\,y} = (e^k)^{x\,y} = e^{k\,x\,y} = \left(e^{k\,x}\right)^y = (a^x)^y$$

II Construction des fonctions logarithmes

Les logarithmes sont les fonctions réciproques des fonctions exponentielles.

1) logarithme de base e :

Commençons par le logarithme népérien Ln, qui est la réciproque de la fonction exponentielle en base e.

Sa définition est la suivante :

Tout nombre réel x strictement positif possède un antécédent y par la fonction exponentielle, ce nombre y est alors l'image de x par la fonction Ln. Autrement dit :

Pour x réel strictement positif et y réel

$$\mathrm{Ln}(x) = y \iff x = e^y$$

Il en découle :

$$\forall\, x \in \,]0;+\infty[\ : \quad e^{\mathrm{Ln}(x)} = x$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Ln}(e^x) = x$$

Les propriétés du logarithme vont alors se déduire de celles de l'exponentielle. Il suffit d'écrire tout nombre x sous forme de l'exponentielle d'un nombre y.

En effet posons pour x et x' deux réels strictement positifs :

$$x = e^{y}$$

$$x' = e^{y'}$$

alors :

$$\mathrm{Ln}(e^{y}\, e^{y'}) = \mathrm{Ln}(e^{y+y'}) = y + y' = \mathrm{Ln}(e^{y}) + \mathrm{Ln}(e^{y'})$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Ln}(x\, x') = \mathrm{Ln}(x) + \mathrm{Ln}(x')}$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{e^{y}}{e^{y'}}\right) = \mathrm{Ln}\left(e^{y-y'}\right) = y - y' = \mathrm{Ln}(e^{y}) - \mathrm{Ln}(e^{y'})$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{x'}\right) = \mathrm{Ln}(x) - \mathrm{Ln}(x')}$$

En particulier :

$$\boxed{\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{Ln}(1) - \mathrm{Ln}(x) = -\mathrm{Ln}(x)}$$

Et pour k réel :

$$\mathrm{Ln}((e^{y})^{k}) = \mathrm{Ln}(e^{k\,y}) = k\,y = k\,\mathrm{Ln}(e^{y})$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Ln}\left(x^{k}\right) = k\,\mathrm{Ln}(x)}$$

Revenons sur la définition de l’exponentielle de base a.

$$\boxed{f(x) = e^{k\,x} = a^{x}}$$

$$\text{avec } a = e^{k} > 0 \; soit \; k = Ln(a)$$

Autrement dit les exponentielles de base a s’expriment sous la forme :

$$\boxed{f(x) = a^{x} = e^{x\,\mathrm{Ln}(a)}}$$

et leur dérivée est f’(x) = k f(x)soit :

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{Ln}(a)\, a^{x}}$$

Noter que cette formule se retrouve avec la dérivation de la composée de $e^{k\,x}$ et de x Ln(a).

2) logarithme de base a

Le logarithme de base a est la réciproque de la fonction exponentielle de base a.

Pour x réel strictement positif et y réel

$$\boxed{\mathrm{Log_a}(x) = y \iff x = a^y}$$

Il en découle :

$$\forall\, x \in \,]0;+\infty[\;: \quad a^{\mathrm{Log_a}(x)} = x$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{Log_a}(a^x) = x$$

Nous allons voir que ce logarithme s'exprime simplement à partir du logarithme népérien. En effet :

Soit y l'image par $\mathrm{Log_a}$ de $x > 0$, alors

$$x = a^y$$

donc

$$\mathrm{Ln}(x) = \mathrm{Ln}(a^y) = \mathrm{Ln}\left(e^{y\,\mathrm{Ln}(a)}\right) = y\,\mathrm{Ln}(a)$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Log_a}(x) = y = \frac{\mathrm{Ln}(x)}{\mathrm{Ln}(a)} = \frac{1}{k}\,\mathrm{Ln}(x)}$$

Autrement dit le logarithme en base a est proportionnel au logarithme népérien. Les propriétés du logarithme en base a se déduisent donc de celles du logarithme népérien à savoir

Pour x et x' réels strictement positifs et k réel :

$$\mathrm{Log_a}(x\,x') = \mathrm{Log_a}(x) + \mathrm{Log_a}(x')$$

$$\mathrm{Log_a}\left(\frac{x}{x'}\right) = \mathrm{Log_a}(x) - \mathrm{Log_a}(x')$$

$$\mathrm{Log_a}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{Log_a}(x)$$

$$\mathrm{Log_a}\left(x^k\right) = k\,\mathrm{Log_a}(x)$$

II Construction en premier des fonctions logarithmes

Nous pouvons inverser le problème et commencer par construire les fonctions logarithmes, les exponentielles seront alors définies comme leurs réciproques. Cette construction nécessite la connaissance du calcul intégral et de ses propriétés. Elle s'avère alors plus simple que la précédente.

Rappelons qu'il s'agit de trouver les fonctions g dérivables sur l'ensemble des réels strictement positif et vérifiant

$$\forall\, x \in]0;+\infty[\quad g'(x) = \frac{1}{k\,x}$$

$$g(1) = 0$$

Ce problème se ramène à une recherche de primitive.

Il suffit de le résoudre pour $k = 1$, ce qui correspond à la construction du logarithme népérien.

Or le calcul intégral nous fournit une réponse , la fonction inverse étant continue sur $]0;+\infty[$ donc intégrable sur tout sous intervalle fermé borné.

Posons pour $x \in]0;+\infty[$:

$$\mathrm{Ln}(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Un théorème sur l'intégrale nous assure que Ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\mathrm{Ln}'(x) = \frac{1}{x}$$

Par dérivation composée, on en déduit si u est une fonction dérivable en x :

$$\boxed{\mathrm{Ln}(\mathrm{u}(\mathrm{x}))' = \frac{\mathrm{u}'(\mathrm{x})}{\mathrm{u}(\mathrm{x})}}$$

Considérons alors pour y>0 la fonction de x paramétrée par y :

$$g_y(x) = \mathrm{Ln}(x\,y)$$

Et dérivons la en x sur $]0;+\infty[$:

$$g_y'(x) = \frac{y}{x\,y} = \frac{1}{x} = \mathrm{Ln}'(x)$$

Donc il existe une constante c(y) (ne dépendant pas de x mais du paramètre y) telle que :

$$\forall\, x \in]0;+\infty[: \quad g_y(x) = \mathrm{Ln}(x\,y) = \mathrm{Ln}(x) + c(y)$$

Pour déterminer c(y), il suffit d'écrire la relation pour $x = 1$, cela donne :

$$\mathrm{Ln}(1\,y) = \mathrm{Ln}(1) + c(y)$$

Soit :

$$c(y) = \mathrm{Ln}(y)$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Ln}(x\,y) = \mathrm{Ln}(x) + \mathrm{Ln}(y)}$$

En prenant pour y l'inverse de x, cette formule conduit à :

$$\boxed{\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{Ln}(x)}$$

Puis :

$$\boxed{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{Ln}\left(x\,\frac{1}{y}\right) = \mathrm{Ln}(x) + \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{y}\right) = \mathrm{Ln}(x) - \mathrm{Ln}(y)}$$

Par récurrence évidente sur n entier naturel :

$$\boxed{\mathrm{Ln}(x^n) = n\,\mathrm{Ln}(x)}$$

D’ où on déduit :

$$\mathrm{Ln}(x^{-n}) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\mathrm{Ln}(x^n) = -n\,\mathrm{Ln}(x)$$

Puis pour p entier relatif et m entier naturel :

$$m\,\mathrm{Ln}\left(x^{\frac{p}{m}}\right) = \mathrm{Ln}(x^p) = p\,\mathrm{Ln}(x)$$

D’où :

$$\mathrm{Ln}\left(x^{\frac{p}{m}}\right) = \frac{p}{m}\,\mathrm{Ln}(x)$$

Soit pour tout rationnel a :

$$\mathrm{Ln}(x^a) = a\,\mathrm{Ln}(x)$$

Nous verrons que cette relation s’étend à a réel après avoir défini l’exponentielle de base a.

Ayant construit le logarithme népérien, les autres logarithmes s’en déduisent facilement. Ce sont les fonctions de la forme :

$$g(x) = \frac{1}{k}\,\mathrm{Ln}(x)$$

II Construction des exponentielles à partir des logarithmes

Nous pouvons alors construire les exponentielles comme réciproques des logarithmes en commençant par la réciproque du logarithme népérien, que nous noterons Exp(x) dans un premier temps et définie par :

Pour x réel et y strictement positif :

$$\mathrm{Exp}(x) = y \iff x = \mathrm{Ln}(y)$$

D’où on déduit

$$\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ : \quad \mathrm{Exp}(\mathrm{Ln}(x) = x$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Ln}(\mathrm{Exp}(x)) = x$$

Les propriétés algébriques de l’exponentielle s’en déduisent :

En posant pour tout x et x' réels : x = Ln(y) et x' = Ln(y') on a :

$$\mathrm{Exp}(x + x') = \mathrm{Exp}\big(\ln(y) + \mathrm{Ln}(y')\big) = \mathrm{Exp}\big(\mathrm{Ln}(y\, y')\big) = \ y\ \ y'$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Exp}(x + x') = \mathrm{Exp}(x)\ \mathrm{Exp}(x')}$$

Ln(1) = 0 conduisant à Exp(0) = 1 on en déduit en prenant x' = -x :

$$\mathrm{Exp}(0) = \ \mathrm{Exp}\big(x + (-x)\big) = \mathrm{Exp}(x)\ \mathrm{Exp}(-x)$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Exp}(-x) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(x)}}$$

Puis :

$$\mathrm{Exp}(x - x') = \mathrm{Exp}\big(x + (-x')\big) = \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(-x') = \mathrm{Exp}(x)\,\frac{1}{\mathrm{Exp}(x')}$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Exp}(x - x') = \frac{\mathrm{Exp}(x)}{\mathrm{Exp}(x')}}$$

Par récurrence sur n entier naturel :

$$\boxed{\mathrm{Exp}(n\, x) = \mathrm{Exp}(x)^{n}}$$

$$\boxed{\mathrm{Exp}(-\, n\, x) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(n\, x)} = \frac{1}{\mathrm{Exp}(x)^{n}} = \mathrm{Exp}(x)^{-n}}$$

Et pour p entier relatif , m entier naturel :

$$\mathrm{Exp}\Big(\frac{p}{m}x\Big)^{m} = \mathrm{Exp}\left(\ m\ \frac{p}{m}x\right) = \mathrm{Exp}(p\, x) = \mathrm{Exp}(x)^{p}$$

Donc :

$$\mathrm{Exp}\left(\frac{p}{m}x\right) = \mathrm{Exp}(\,x\,)^{\frac{p}{m}}$$

Donc a rationnel et x réel :

$$\boxed{\mathrm{Exp}(a\,x) = \mathrm{Exp}(x)^a}$$

Nous verrons que cette relation s'étend à a réel.

Venons alors à la construction des autres fonctions exponentielles en considérant les fonctions f de la forme :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{Exp}(k\,x)}$$

vérifions qu'elles sont réciproques des fonctions :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{k}\,\mathrm{Ln}(x)}$$

En effet notons $f(x) = y$ et vérifions que y est l'antécédent de x par g soit $g(y) = x$:

$$g(y) = \frac{1}{k}\,\mathrm{Ln}(y) = \frac{1}{k}\,\mathrm{Ln}\big(\mathrm{Exp}(k\,x)\big) = \frac{1}{k}\,k\,x = x$$

Posons alors $a = \mathrm{Exp}(k)$, il vient pour x rationnel :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{Exp}(k\,x) = \mathrm{Exp}(k)^x = a^x}$$

Il est aisé de constater que f vérifie $f(0) = 1$ et pour tout couple (x,y) de réels :

$$\boxed{\begin{gathered} f(x+y) = f(x)\,f(y) \\ f(-x) = \frac{1}{f(x)} \\ f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \end{gathered}}$$

En notant que $a = \mathrm{Exp}(k)$ conduit à $k = \mathrm{Ln}(a)$ on a également :

$$f(x) = \mathrm{Exp}(\mathrm{Ln}(a)x)$$

Compte tenu des propriétés de f, on convient alors de noter pour tout x réel et tout a strictement positif :

$$\boxed{e^x = \mathrm{Exp}(x)}$$

$$a^x = \mathrm{Exp}(\mathrm{Ln}(a)x) = e^{x\,\mathrm{Ln}(a)}$$

On définit ainsi les exponentielles de base e et de base a.

Il est à noter que cette définition conduit à la propriété pour tout x et y réels et tout a strictement positif :

$$a^{x\,y} = (a^x)^y$$

II Limites et dérivées des exponentielles et des logarithmes