Exponentielles de matrices

Dans toute la suite, on désigne par $\mathbb{R}_p^{col}$,pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices uni-colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ celui des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{R}$.

<u>I Observations préliminaires :</u>

Rappelons que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\, x^k$$

Considérons alors une matrice diagonale d'ordre 2 :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Et formons la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, a^k & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, b^k \end{pmatrix}$$

Rappelons que sur l'espace vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{M}_p}(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et en particulier à la norme infinie définie pour $\boldsymbol{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p}(\mathbb{R})$ par :

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \boldsymbol{sup}_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in [\![\boldsymbol{1},\boldsymbol{p}]\!]^2}\{|\boldsymbol{a_{ij}}|\}$$

Ainsi pour une suite $\boldsymbol{A_n = (a_{ij,n})}$ de matrices et une matrice $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ de $\boldsymbol{\mathcal{M}_p}(\mathbb{R})$ on a, au sens d'une norme quelconque notée $\| \quad \|$:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A_n = A} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{A_n - A}\| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{A_n - A}\|_\infty = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \forall\, (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in [\![\boldsymbol{1},\boldsymbol{p}]\!]^{\boldsymbol{2}} : \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_{ij,n} = a_{ij}}$$

Les propriétés des limites sur les suites de nombres réels se généralisent alors aux limites de suites de matrices, ainsi si

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A_n = A}, \qquad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{B_n = B}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A_n + B_n}) = \boldsymbol{A + B}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A_n\, B_n}) = \boldsymbol{A\, B}$$

Si de plus $\boldsymbol{A_n}$ et $\boldsymbol{A}$ inversibles alors :

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A_n}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

Ainsi la suite de matrices S_n converge et on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$$

Il parait alors naturel de qualifier cette limite d'exponentielle de la matrice D.

Il est à noter que ce résultat se généralise à toute matrice diagonale D de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sous forme :

$$\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & d_p \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\, D^k = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & e^{d_p} \end{pmatrix}}$$

Notons que la définition peut encore s'étendre à des matrices diagonalisables. En effet, si on a, avec D diagonale d'ordre p et P inversible d'ordre p :

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

Alors pour tout entier naturel k :

$$A^k = P\, D^k\, P^{-1}$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{e^A = e^{P\,D\,P^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, P\, D^k\, P^{-1} = \lim_{n\to\infty} P \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, D^k \right) P^{-1} = P\, e^D\, P^{-1}}$$

<u>II Exponentielle d'une matrice carrée</u>

<u>1) Théorème définition</u> :

Soit $\boldsymbol{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ et :

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, D^k}$$

Alors la suite $\boldsymbol{S_n}$ converge et sa limite est notée :

$$\boldsymbol{e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\, A^k}$$

Preuve :

<u>Préliminaire</u> :

Soit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $C = (c_{ij}) = A\, B$ alors :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 :\ |c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|\ |b_{kj}| \leq p\ \|A\|_\infty\ \|B\|_\infty$$

Ainsi :

$$\boxed{\|\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\|_\infty \leq \boldsymbol{p}\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty\ \|\boldsymbol{B}\|_\infty}$$

Donc :

$$\|A^2\|_\infty \leq p\ \|A\|_\infty{}^2$$

$$\|A^3\|_\infty = \|A^2\ A\|_\infty \leq p^2\ \|A\|_\infty{}^3$$

Et ainsi, pour tout entier naturel k :

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\right\|_\infty \leq \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k-1}}\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty{}^{\boldsymbol{k}}}$$

<u>Suite de la preuve</u> :

$\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ étant un espace métrique complet pour n'importe quelle norme, nous allons montrer que la suite (S_n) est de Cauchy pour la norme infinie en considérant pour $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$:

$$\|S_{n+m} - S_n\|_\infty = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!}\ A^k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!}\ \left\|A^k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!}\ p^{k-1}\ \|A\|_\infty{}^k$$

Or :

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!}\ p^{k-1}\ \|A\|_\infty{}^k = \frac{1}{p} \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!} (p\ \|A\|_\infty)^k$$

Et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!} (p\ \|A\|_\infty)^k = e^{p\ \|A\|_\infty}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k\,!}\ p^{k-1}\ \|A\|_\infty{}^k < \varepsilon$$

Donc :

$$\|S_{n+m} - S_n\|_\infty < \varepsilon$$

La suite (S_n) est donc de Cauchy donc elle converge pour la norme infinie et donc pour toute norme.

2) Norme triple

Théorème définition :

On considère l'application suivante de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$|||A|||_2 = \sup_{X \in \mathcal{S}_1} \{\|A\,X\|_2\}$$

Où $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne définie pour $X = (x_i) \in \mathbb{R}_p^{col}$ par :

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} {x_i}^2}$$

Et $\mathcal{S}_1$ est la sphère unité associée à la norme 2, soit :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{X \in \mathbb{R}_p^{col} :\ \|X\|_2 = 1\right\}$$

Cette application est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $X \in \mathbb{R}_p^{col}$:

$$\|A\,X\|_2 \leq |||A|||_2\ \|X\|_2$$

Et pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$:

$$|||A\,B|||_2 \leq |||A|||_2\ |||B|||_2$$

Ainsi :

$$\left|\left|\left|e^A\right|\right|\right|_2 = \left|\left|\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\,A^k\right|\right|\right|_2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\ {|||A|||_2}^k = e^{|||A|||_2}$$

Preuve :

$|||\ \ |||_2$ est une norme :

Premier point :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $|||A|||_2 = 0$ et $X \in \mathbb{R}_p^{col} \backslash \{0\}$ alors

$$\frac{1}{\|X\|_2} X\ \in \mathcal{S}_1$$

Donc :

$$\left\|A\ \frac{1}{\|X\|_2} X\right\|_2 = 0$$

Donc :

$$A\,X = 0$$

Et :

$$A = 0$$

Réciproquement :

$$|||0|||_2 = 0$$

Ainsi :

$$|||A|||_2 = 0 \Leftrightarrow \ A = 0$$

Second point :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|||\lambda\, A|||_2 = \sup_{X\in\mathcal{S}_1}\ \{\|\lambda\, A\, X\|_2\} = |\lambda| \sup_{X\in\mathcal{S}_1}\ \{\|A\, X\|_2\} = |\lambda|\ |||A|||_2$$

Troisième point : inégalité triangulaire :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$:

Soit $X \in \mathcal{S}_1$ alors :

$$\|(A + B)\ X\|_2 = \|A\, X + B\, X\|_2 \leq \|A\, X\|_2 + \|B\, X\|_2 \leq |||A|||_2 + |||B|||_2$$

Donc :

$$|||A + B|||_2 \leq |||A|||_2 + |||B|||_2$$

Autres points :

Soit $X \in \mathbb{R}_p^{col}\backslash\{0\}$ alors

$$\frac{1}{\|X\|_2} X \ \in \mathcal{S}_1$$

Donc :

$$\left\|A\ \frac{1}{\|X\|_2} X\right\|_2 \leq |||A|||_2$$

Donc :

$$\frac{1}{\|X\|_2}\ \ \|A\, X\|_2 \leq |||A|||_2$$

D'où :

$$\|A\, X\|_2 \leq |||A|||_2\ \ \|X\|_2$$

Et pour $X \in \mathcal{S}_1$

$$\|A\, B\, X\|_2 \leq |||A|||_2\ \ \|B\, X\|_2 \leq |||A|||_2\ |||B|||_2$$

D'où :

$$|||A\, B|||_2 \leq |||A|||_2\ |||B|||_2$$

3) Norme triple d'une matrice symétrique réelle

Théorème :

Pour une matrice symétrique réelle A d'ordre p, on a :

$$|||\boldsymbol{A}|||_2 = \mathbf{sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\ \{|\boldsymbol{\lambda_i}|\}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

Et :

$$|\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{A})| \leq \boldsymbol{p}\ |||\boldsymbol{A}|||_2$$

Preuve :

Considérons une matrice symétrique réelle A d'ordre p. Alors elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Donc il existe une matrice carrée diagonale D d'ordre p et une matrice carrée unitaire P d'ordre p telles que :

$$A = P\ D\ P^{-1}, \qquad P^{-1} = {}^tP$$

Or pour tout $X \in \mathcal{S}_1$ il existe un unique $Y \in \mathbb{R}_p^{col}$ tel que $X = P^{-1}\ Y$, à savoir $Y = P\ X$ vérifiant donc :

$$\|Y\|_2{}^2 = {}^tY\ Y = {}^tX\ {}^tP\ P\ X = {}^tX\ X = \|X\|_2{}^2 = 1$$

Et donc $Y \in \mathcal{S}_1$. D'où :

$$\sup_{X\in\mathcal{S}_1}\ \{\|A\ X\|_2\} = \sup_{Y\in\mathcal{S}_1}\ \{\|A\ P^{-1}\ Y\|_2\} = \sup_{Y\in\mathcal{S}_1}\ \{\|P\ A\ P^{-1}\ Y\|_2\} = \sup_{Y\in\mathcal{S}_1}\ \{\|D\ Y\|_2\}$$

Et donc :

$$|||A|||_2 = |||D|||_2$$

Soit $(P_1, P_2, \ldots, P_p)$ les colonnes de P et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ les éléments diagonaux de D. Soit $X \in \mathcal{S}_1$ alors il existe un $p - uplet$ $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de réels tels que :

$$X = \sum_{i=0}^{p} x_i\ P_i$$

Et où :

$$\|X\|_2{}^2 = \sum_{i=0}^{p} x_i{}^2\ \|P_i\|_2{}^2 = \sum_{i=0}^{p} x_i{}^2 = 1$$

Alors :

$$A\ X = \sum_{i=0}^{p} (x_i\ A\ P_i) = \sum_{i=0}^{p} (x_i\ \lambda_i\ P_i)$$

Et :

$$\|A\ X\|_2{}^2 = \sum_{i=0}^{p} x_i{}^2\ \lambda_i{}^2$$

Supposons alors, sans nuire à la généralité que :

$$|\lambda_1| = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \{|\lambda_i|\}$$

Alors :

$$\|A\,X\|_2{}^2 \leq \sum_{i=0}^{p} x_i{}^2\ \lambda_1{}^2 = \lambda_1{}^2$$

Donc :

$$\|A\,X\|_2 \leq |\lambda_1|$$

De plus :

$$\|A\,P_1\|_2 = |\lambda_1|, \quad \|\,P_1\|_2 = 1$$

Donc :

$$|\|A\||_2 = |\lambda_1|$$

De plus :

$$|Tr(A)| = \left|\sum_{i=0}^{p} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=0}^{p} |\lambda_i| \leq p\ |\lambda_1| = p\ |\|A\||_2$$

<u>4) Propriété de l'exponentielle de matrices vis-à-vis de la somme :</u>

Soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ commutent alors :

$$\boldsymbol{e^{A+B} = e^A\, e^B}$$

Il en découle que $\boldsymbol{e^A}$ est inversible et :

$$\boldsymbol{\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}}$$

Et pour tout $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{\left(e^A\right)^q = e^{q\,A}}$$

Preuve :

$$e^A\, e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ B^k\right)$$

$$= \sum_{(q,k)\in\mathbb{N}^2} \left(\frac{1}{q!} A^q \frac{1}{k!} B^k\right)$$

En faisant une sommation par bandes d'équations $q + k = m$

$$e^A\, e^B = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{m} \left(\frac{1}{q!} A^q \frac{1}{(m-q)!} B^{m-q}\right)$$

$$== \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{m} \left(\frac{1}{m\,!} \frac{m\,!}{q!\ (m-q)!} A^q\ B^{m-q}\right)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m\,!} \sum_{q=0}^{m} \left(\binom{m}{q}\ A^q\ B^{m-q}\right)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m\,!} (A+B)^m = e^{A+B}$$

De plus :

$$e^{A+(-A)} = e^{I_p} = I_p$$

Donc :

$$e^A\ e^{-A} = I_p$$

Donc e^A inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

<u>III Equation différentielle vectorielle linéaire du premier ordre</u>

Préliminaire :

On considère, pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}_p^{col}$ la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_p^{col}$ définie par :

$$\boldsymbol{f(t) = e^{t\,A}\ X}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boldsymbol{f'(t) = A\ e^{t\,A}\ X}$$

Preuve :

Soit $t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^*$ posons :

$$g_t(h) = \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) - A\ e^{t\,A}\ X$$

$$= \left(\frac{1}{h}\left(e^{(t+h)\,A} - e^{t\,A}\right) - A\ e^{t\,A}\right)\ X$$

$$= e^{t\,A}\ \left(\frac{1}{h}\left(e^{h\,A} - I_p\right) - A\right)\ X$$

Et :

$$\|g_t(h)\|_2 \leq |||e^{t\,A}|||_2\ \left|\left|\left|\frac{1}{h}\left(e^{h\,A} - I_p\right) - A\right|\right|\right|_2\ \|X\|_2$$

Or :

$$\left|\left|\left|\frac{1}{h}\left(e^{h\,A} - I_p\right) - A\right|\right|\right|_2 = \left|\left|\left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}\ A^k\right|\right|\right|_2 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|h|^{k-1}}{k!}\ |||A|||_2{}^k = |h|\ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|h|^{k-2}}{k!}\ |||A|||_2{}^k$$

Donc si $|h| < 1$:

$$\left|\left|\left|\frac{1}{h}\left(e^{h\,A} - I_p\right) - A\right|\right|\right|_2 \leq |h| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ |||A|||_2{}^k$$

Et :

$$\|g_t(h)\|_2 \leq |h|\ |||e^{t\,A}|||_2 \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ |||A|||_2{}^k\right) \|X\|_2$$

Ainsi à t fixé, la quantité majorante tendant vers 0 quand h tend vers 0 on a :

$$\lim_{h \to 0} g_t(h) = 0$$

Donc f est dérivable en t et :

$$f'(t) = A\, e^{t\,A}\, X$$

On considère, pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'équation différentielle suivante pour une fonction Y dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_p^{col}$:

$$\boldsymbol{Y' = A\,Y}$$

Alors

$$\forall\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{Y'(t) = A\,Y(t)} \Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{Y(t) = e^{t\,A}\,Y(0)}$$

Preuve :

Notons d'abord que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $(X, Y) \in {\mathbb{R}_p^{col}}^2$:

$$Y = e^{A}\, X \Leftrightarrow\ e^{-A}\, Y =\ X$$

Ainsi

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : Y'(t) = A\, Y(t) \Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : Y'(t) - A\, Y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ e^{-t\,A}\, Y'(t) - A\, e^{-t\,A}\, Y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \left(e^{-t\,A}\, Y(t)\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ e^{-t\,A}\, Y(t) = Y(0)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{t\,A}\, Y(0)$$

IV Matrice positive

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite positive si pour tout $X \in \mathbb{R}_p^{col}$:

$$\boldsymbol{{}^tX\, A\, X \geq 0}$$

<u>Propriété</u> :

Soit $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_p}(\mathbb{R})$:

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_p}(\mathbb{R}) \ \boldsymbol{positive} \ \Leftrightarrow \ \forall\, \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, +\infty[\ : \ \left|\left\|\boldsymbol{e^{-t\,A}}\right\|\right|_{\boldsymbol{2}} \leq \boldsymbol{1}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ Soit $X \in \mathcal{S}_1$. Introduisons la fonction $Y(t) = e^{-t\,A}\,X$. Cette fonction vérifie sur $[0, +\infty[$:

$$Y'(t) = -A\,Y(t)$$

Donc :

$${}^tY(t)\,Y'(t) = -\ {}^tY(t)\,A\,Y(t)$$

$$\left(\frac{1}{2}\ \|Y(t)\|_2{}^2\right)' = -\ {}^tY(t)\,A\,Y(t) \leq 0$$

La fonction qui a une dérivée négative ou nulle est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et donc :

$$\frac{1}{2}\ \|Y(t)\|_2{}^2 \leq \frac{1}{2}\ \|Y(0)\|_2{}^2$$

$$\|Y(t)\|_2 \leq\ \|Y(0)\|_2$$

$$\|e^{-t\,A}\,X\|_2 \leq\ \|\,X\|_2 = 1$$

$$|\|e^{-t\,A}\||_2 \leq 1$$

$(\Rightarrow)$ Supposons : $\forall\, t \in [0, +\infty[\ :\ |\|e^{-t\,A}\||_2 \leq 1$.

Soit $X \in \mathbb{R}_p^{col}$ alors :

$$\forall\, t \in [0, +\infty[\ :\ \ \|e^{-t\,A}\,X\|_2 \leq\ \|\,X\|_2$$

Soit $0 \leq t_1 \leq t_2$ et $X \in \mathbb{R}_p^{col}$ alors :

$$\left\|e^{-(t_2-t_1)\,A}\ e^{-t_1\,A}\,X\right\|_2 \leq\ \|e^{-t_1\,A}\,X\|_2$$

$$\|\ e^{-t_2\,A}\,X\|_2 \leq\ \|e^{-t_1\,A}\,X\|_2$$

Introduisons la fonction $Y(t) = e^{-t\,A}\,X$ sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\|\ Y(t_2)\|_2 \leq\ \|Y(t_1)\|_2$$

Donc :

$$\|\ Y(t_2)\|_2{}^2 \leq\ \|Y(t_1)\|_2{}^2$$

Donc la fonction $\|\ Y(t)\|_2{}^2$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ donc sa dérivée est négative ou nulle. Ainsi :

$$2\ {}^tY(t)\,Y'(t) \leq 0$$

$$-2\ {}^tY(t)\,A\,Y(t) \leq 0$$

$${}^tY(t)\,A\,Y(t) \geq 0$$

$$^tY(0)\,A\,Y(0) \geq 0$$

$$^tX\,A\,X \geq 0$$

Donc A est positive.

V Formules de Trotter-Kato

Formule de Lie Trotter Kato

> **Soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{\mathcal{M}_p}(\mathbb{R})^2$ alors il existe une constante $\boldsymbol{C_{AB}} \in]\boldsymbol{0}, +\infty[$ telle que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ et tout $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$:**
>
> $$\left|\left|\left|\left(e^{-\frac{t}{n}A}\, e^{-\frac{t}{n}B}\right)^n - e^{-t\,(A+B)}\right|\right|\right|_2 \leq \frac{C_{AB}}{n}$$

Preuve :

Si A et B commutent, la quantité à majorer est nulle et la formule est évidente

Dans l'autre cas, notons que :

$$e^{-t\,(A+B)} = \left(e^{-\frac{t}{n}\,(A+B)}\right)^n$$

Posons donc :

$$S_n(t) = e^{-\frac{t}{n}A}\, e^{-\frac{t}{n}B}, \qquad T_n(t) = e^{-\frac{t}{n}\,(A+B)}$$

La quantité à majorer est donc :

$$|||S_n(t)^{\boldsymbol{n}} - T_n(t)^{\boldsymbol{n}}|||_{\boldsymbol{2}}$$

Notons également que :

$$|||S_n(t)|||_2 \leq \left|\left|\left|e^{-\frac{t}{n}A}\right|\right|\right|_2 \left|\left|\left|e^{-\frac{t}{n}B}\right|\right|\right|_2 \leq e^{\left|\left|\left|-\frac{t}{n}A\right|\right|\right|_2}\, e^{\left|\left|\left|-\frac{t}{n}B\right|\right|\right|_2} = e^{\frac{t}{n}(|||A|||_2 + |||B|||_2)} \leq e^{|||A|||_2 + |||B|||_2}$$

$$|||T_n(t)|||_2 \leq e^{\left|\left|\left|-\frac{t}{n}(A+B)\right|\right|\right|_2} = e^{\frac{t}{n}|||A+B|||_2} \leq e^{|||A+B|||_2} \leq e^{|||A|||_2 + |||B|||_2}$$

Nous pouvons alors faire apparaitre une somme télescopique :

$$S_n(t)^{\boldsymbol{n}} - T_n(t)^{\boldsymbol{n}} =$$

$$S_n(t)^{\boldsymbol{n}} - S_n(t)^{n-1}T_n(t)$$

$$+S_n(t)^{n-1}T_n(t) - S_n(t)^{n-2}T_n(t)^2$$

$$+\cdots$$

$$+S_n(t)\,T_n(t)^{n-1} - T_n(t)^{\boldsymbol{n}}$$

Autrement dit :

$$S_n(t)^{\boldsymbol{n}} - T_n(t)^{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(S_n(t)^{n-k}T_n(t)^k - S_n(t)^{n-(k+1)}T_n(t)^{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(S_n(t)^{n-(k+1)}\, S_n(t)\, T_n(t)^k - S_n(t)^{n-(k+1)}\, T_n(t)\, T_n(t)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} S_n(t)^{n-(k+1)}\left(S_n(t) - T_n(t)\right)\, T_n(t)^k$$

Ainsi :

$$|||S_n(t)^{\boldsymbol{n}} - T_n(t)^{\boldsymbol{n}}|||_{\boldsymbol{2}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |||S_n(t)|||_2{}^{n-(k+1)}\ |||S_n(t) - T_n(t)|||_2\ \ |||T_n(t)|||_2{}^k$$

$$\boxed{|||S_n(t)^n - T_n(t)^n|||_2 \leq n\, e^{|||\,A|||_2 + |||\,B|||_2}\ |||S_n(t) - T_n(t)|||_2}$$

En outre :

$$S_n(t) - T_n(t) = e^{-\frac{t}{n}A}\, e^{-\frac{t}{n}B} - e^{-\frac{t}{n}(A+B)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\, A^k \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\, B^k - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\, (A+B)^k$$

$$= \sum_{(k,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{(-1)^{k+q}}{n^{k+q}\, k!\, q!}\, A^k\, B^q\ - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\, (A+B)^k$$

$$= \left(I_p - A - B + \sum_{\substack{(k,q)\in \\ \mathbb{N}^2\setminus\{(0,0),(0,1),(1,0)\}}}\frac{(-1)^{k+q}}{n^{k+q}\, k!\, q!}\, A^k\, B^q\right) - \left(I_p - (A+B) + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\, (A+B)^k\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\substack{(k,q)\in \\ \mathbb{N}^2\setminus\{(0,0),(0,1),(1,0)\}}}\frac{(-1)^{k+q}}{n^{k+q-2}\, k!\, q!}\, A^k\, B^q - \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^{k-2}\, k!}\, (A+B)^k\right)$$

Donc :

$$|||S_n(t) - T_n(t)|||_2$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\substack{(k,q)\in \\ \mathbb{N}^2\setminus\{(0,0),(0,1),(1,0)\}}}\frac{1}{n^{k+q-2}\, k!\, q!}\ |||\,A|||_2{}^k\ |||\,B|||_2{}^q + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{k-2}\, k!}\ (|||\,A|||_2 + |||\,B|||_2)^k\right)$$

D’où :

$$|||S_n(t) - T_n(t)|||_2 \leq \frac{C}{n^2}$$

Et :

$$|||S_n(t)^n - T_n(t)^n|||_2 \leq n\, e^{\,|||A|||_2 + |||B|||_2}\ \frac{C}{n^2} = \frac{C_{AB}}{n^2}$$

Formule de Trotter Kato

Soit $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ alors il existe une constante $\boldsymbol{C'_{AB}} \in]\mathbf{0}, +\infty[$ telle que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ et tout $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$:

$$\left|\left|\left|\left(e^{-t\,A/(2\,n)}\ e^{-t\,B/n}\ e^{-t\,A/(2\,n)}\right)^n - e^{-t\,(A+B)}\right|\right|\right|_2 \leq \frac{C'_{AB}}{n^2}$$

Preuve :

On reprend la démarche précédente avec :

$$S_n(t) = e^{-\frac{t}{2\,n}A}\ e^{-\frac{t}{n}B}\ e^{-\frac{t}{2\,n}A}, \qquad T_n(t) = e^{-\frac{t}{n}(A+B)}$$

$$|||S_n(t)|||_2 \leq \left|\left|\left|e^{-\frac{t}{2\,n}A}\right|\right|\right|_2 \left|\left|\left|e^{-\frac{t}{n}B}\right|\right|\right|_2 \left|\left|\left|e^{-\frac{t}{2\,n}A}\right|\right|\right|_2 \leq e^{\frac{t}{n}(|||A|||_2 + |||B|||_2)} \leq e^{\,|||A|||_2 + |||B|||_2}$$

Reste valable :

$$|||S_n(t)^n - T_n(t)^n|||_2 \leq n\, e^{\,|||A|||_2 + |||B|||_2}\ |||S_n(t) - T_n(t)|||_2$$

Et on adapte :

$$S_n(t) - T_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,n)^k\, k!}\ A^k\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\ B^k \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,n)^k\, k!}\ A^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\ (A+B)^k$$

$$= \sum_{(k,q,r)\in\mathbb{N}^3} \frac{(-1)^{k+q+r}}{(2\,n)^{k+r}\ n^q\ k!\, q!\, r!}\ A^k\ B^q A^r - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^k\, k!}\ (A+B)^k$$

Voyons les termes produits par les deux sommes :

en $1/n^0$:

la première somme donne les termes correspondants à $(k, q, r) \in \{(0,0,0)\}$ donc le terme I_p et la seconde donne également I_p. Ces deux termes s'éliminent donc dans la différence.

en $1/n^1$:

la première somme donne les termes correspondants à $(k, q, r) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ donc les termes :

$$-\frac{1}{2\,n}\ A - \frac{1}{n}\ B - \frac{1}{2\,n}\ A$$

et la seconde :

$$-\frac{1}{n}\ (A+B)$$

Ces termes s'éliminent donc dans la différence.

en $1/n^2$:

la première somme donne les termes correspondants à $(k, q, r) \in \{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ donc les termes :

$$\frac{1}{8\,n^2}\ A^2 + \frac{1}{2\,n^2}\ B^2 + \frac{1}{8\,n^2}\ A^2 + \frac{1}{2\,n^2}\ A\,B + \frac{1}{2\,n^2}\ B\,A + \frac{1}{4\,n^2}\ A^2$$
$$= \frac{1}{2\,n^2}\ A^2 + \frac{1}{2\,n^2}\ B^2 + \frac{1}{2\,n^2}\ A\,B + \frac{1}{2\,n^2}\ B\,A$$

et la seconde :

$$\frac{1}{2\,n^2}\ (A+B)^2 = \frac{1}{2\,n^2}(A^2 + A\,B + B\,A + B^2)$$

Ces termes s'éliminent donc dans la différence.

Ainsi, dans une démarche analogue à la précédente :

$$|||S_n(t) - T_n(t)|||_2 \leq \frac{C'}{n^3}$$

Et :

$$|||S_n(t)^n - T_n(t)^n|||_2 \leq n\ e^{|||\,A|||_2 + |||\,B|||_2}\ \frac{C'}{n^3} = \frac{C'_{AB}}{n^2}$$