Exponentielle complexe

I Définition :

Afin d'étendre la définition de la fonction exponentielle aux nombres complexes, on pose :

$$\boldsymbol{exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

La série associée ayant un rayon de convergence infini (par la règle de D'Alembert), cette fonction est donc définie sur l'ensemble des complexes.

II Propriétés algébriques :

Les propriétés de l'exponentielle sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes, à savoir, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{exp(z + z') = exp(z)\, exp(z')}$$

$$\boldsymbol{exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}}$$

$$\boldsymbol{exp(z - z') = \frac{exp(z)}{exp(z')}}$$

$$\boldsymbol{exp(p\, z) = exp(z)^p}$$

Preuves :

Nous avons d'une part :

$$\frac{(z + z')^k}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{n} z^n\, z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(z + z')^k}{k!} = \sum_{\substack{0 \le n+m \le N \\ 0 \le n \le N \\ 0 \le m \le N}} \frac{z^n}{n!} \frac{z'^m}{m!}$$

D'autre part :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{N} \frac{z'^m}{m!} = \sum_{\substack{0 \le n \le N \\ 0 \le m \le N}} \frac{z^n}{n!} \frac{z'^m}{m!}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(z+z')^k}{k!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{N}\frac{z'^m}{m!}-\sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}}\frac{z^n}{n!}\frac{z'^m}{m!}$$

Le premier membre tend vers $exp(z+z')$ quand N tend vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers $exp(z)\ exp(z')$, il reste donc à montrer que le deuxième terme tend vers 0. Notons pour cela :

$$\left|\sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}}\frac{z}{n!}\frac{z'^m}{m!}\right|\leq\sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}}\frac{|z|^n}{n!}\frac{|z'|^m}{m!}$$

Et que :

$$\sum_{\substack{N+1\leq n+m\leq 2N\\0\leq n\leq N\\0\leq m\leq N}}\frac{|z|^n}{n!}\frac{|z'|^m}{m!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(|z|+|z'|)^k}{k!}-\sum_{n=0}^{N}\frac{|z|^n}{n!}\sum_{n=0}^{N}\frac{|z'|^m}{m!}$$

Or le second membre de cette relation tend, quand N tend vers l'infini, vers $exp(|z|+|z'|)-exp(|z|)\ exp(|z'|)$ qui vaut 0 donc le premier membre tend également vers 0. Ceci prouve :

$$exp(z+z')=exp(z)\ exp(z')$$

Les autres propriétés en découlent aisément car :

$$1=exp(0)=exp(z+(-z))=exp(z)\ exp(-z)$$

$$exp(z-z')=exp(z+(-z'))=exp(z)\ exp(-z')=exp(z)\ \frac{1}{exp(z')}=\frac{exp(z)}{exp(z')}$$

Selon le signe de p :

$p>0$

$$exp(p\ z)=exp(z+z+\cdots+z)=exp(z)\ exp(z)\ \ldots\ldots exp(z)=exp(z)^p$$

$p=-n<0$

$$exp(p\ z)=exp(-n\ z)=\frac{1}{exp(n\ z)}=\frac{1}{exp(z)^n}=exp(z)^{-n}=exp(z)^p$$

<u>III Lien avec les autres formes exponentielles :</u>

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$exp(x) = e^x$$

Pour $z = i\,y \in i\,\mathbb{R}$:

$$exp(i\,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n\,y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,y^{2\,k}}{(2\,k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,y^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} = cos(y) + i\,sin(y) = e^{i\,y}$$

Pour $z = x + i\,y$

$$exp(x + i\,y) = exp(x)\,exp(i\,y) = e^x\,\big(cos(y) + i\,sin(y)\big)$$

<u>III Dérivabilité de composées</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(t) = exp(f(t))$$

Alors g est dérivable sur I et :

$$g'(t) = f'(t)\,exp(f(t))$$

<u>Preuve</u> :

Décomposons f en partie réelle et imaginaire :

$$f(t) = x(t) + i\,y(t)$$

Alors :

$$g(t) = e^{x(t)}\,\big(cos(y(t)) + i\,sin(y(t))\big)$$

Donc g est dérivable sur I et :

$$g'(t) = x'(t)\,e^{x(t)}\,\Big(cos\big(y(t)\big) + i\,sin\big(y(t)\big)\Big) + y'(t)\,e^{x(t)}\,\Big(-sin\big(y(t)\big) + i\,cos\big(y(t)\big)\Big)$$

Soit :

$$g'(t) = \big(x'(t) + i\,y'(t)\big)\,e^{x(t)}\,cos\big(y(t)\big) + i\,sin\big(y(t)\big) = f'(t)\,exp(f(t))$$