Espaces vectoriels euclidiens

(FICHIER EN COURS D'ELABORATION)

I Définitions

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie p. Si on munit cet espace d'un produit scalaire f (voir définition et propriétés générales dans le fichier sur la topologie des espaces vectoriels normés), on le qualifie **d'espace vectoriel euclidien**.

Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont dit orthogonaux pour le produit scalaire f s'ils vérifient :

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Une famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m})$ est dite **orthogonale** pour le produit scalaire f si elle vérifie :

$$\forall\ (k,l) \in [\![1;p]\!]^2 :\ \ k \neq l \ \ \Rightarrow \ \ f(\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_l}) = 0$$

elle est dite **orthonormale**, si de plus :

$$\forall\ k \in [\![1;p]\!] \ :\ f(\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_k}) = 1$$

Toute famille orthogonale est libre.

Preuve :

Soit une famille orthogonale $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m})$. Posons :

$$x_1\, \overrightarrow{e_1} + x_2\, \overrightarrow{e_2} + \dots + x_m\, \overrightarrow{e_m} = \vec{0}$$

alors pour tout k de $[\![1;m]\!]$ on a :

$$f(x_1\, \overrightarrow{e_1} + x_2\, \overrightarrow{e_2} + \dots + x_m\, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e_k}) = 0$$

$$x_1\, f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_k}) + x_2\, f(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_k}) + \dots + x_m\, f(\overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e_k}) = 0$$

$$x_k = 0$$

d'où le résultat.

Une base orthogonale (resp. orthonormale) est une famille orthogonale et donc une famille orthogonale (resp. orthonormale) à p éléments.

Si $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$ alors :

$$\boldsymbol{\vec{u} = f(\vec{u}, \overrightarrow{e_1})\, \overrightarrow{e_1} + f(\vec{u}, \overrightarrow{e_2})\, \overrightarrow{e_2} + \cdots + f\left(\vec{u}, \overrightarrow{e_p}\right) \overrightarrow{e_p}}$$

Preuve :

Posons

$$\vec{u} = x_1\, \overrightarrow{e_1} + x_2\, \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\, \overrightarrow{e_p}$$

Alors, comme vu dans la preuve précédente, pour tout k de $[\![1; m]\!]$ on a :

$$f(\vec{u}, \overrightarrow{e_k}) = x_k$$

II Existence de bases orthogonales et de bases orthonormales

Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale pour le produit scalaire considéré. Plus précisément, on peut construire une base orthonormale à partir de n'importe quelle base selon le **procédé d'orthonormalisation de Schmidt** décrit par récurrence de la façon suivante :

Soit $\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p}\right)$ une base de $\mathbb{E}$ et f le produit scalaire défini sur $\mathbb{E}$. Notons la norme associée sous la forme :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}$$

Etape 1 :

On pose :

$$\overrightarrow{b_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{a_1}\|} \overrightarrow{a_1}$$

alors :

$$f\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}\right) = \frac{1}{\|\overrightarrow{a_1}\|^2} f\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}\right) = 1$$

donc $\overrightarrow{b_1}$ est un vecteur de norme unité et :

$$Vect(\overrightarrow{b_1}) = Vect(\overrightarrow{a_1})$$

<u>Etape 2</u> :

On définit :

$$\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{a_2} - f(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1})\,\overrightarrow{b_1}$$

$$\overrightarrow{b_2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{c_2}\|}\overrightarrow{c_2}$$

alors on a :

$$f(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_1}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{c_2}\|}\left(f(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}) - f(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1})\,f(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1})\right) = 0$$

$$f(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2}) = 1$$

Donc $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})$ est une famille orthonormale et :

$$Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$$

<u>Etape $(n+1)$</u>:

On suppose obtenue à l'étape n, pour $n \leq p-1$, une famille orthonormale $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n})$ telle que :

$$Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}) = Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n})$$

alors on pose :

$$\overrightarrow{c_{n+1}} = \overrightarrow{a_{n+1}} - \sum_{l=1}^{n} f(\overrightarrow{a_{n+1}}, \overrightarrow{b_l})\,\overrightarrow{b_l}$$

$$\overrightarrow{b_{n+1}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{c_{n+1}}\|}\overrightarrow{c_{n+1}}$$

alors on a :

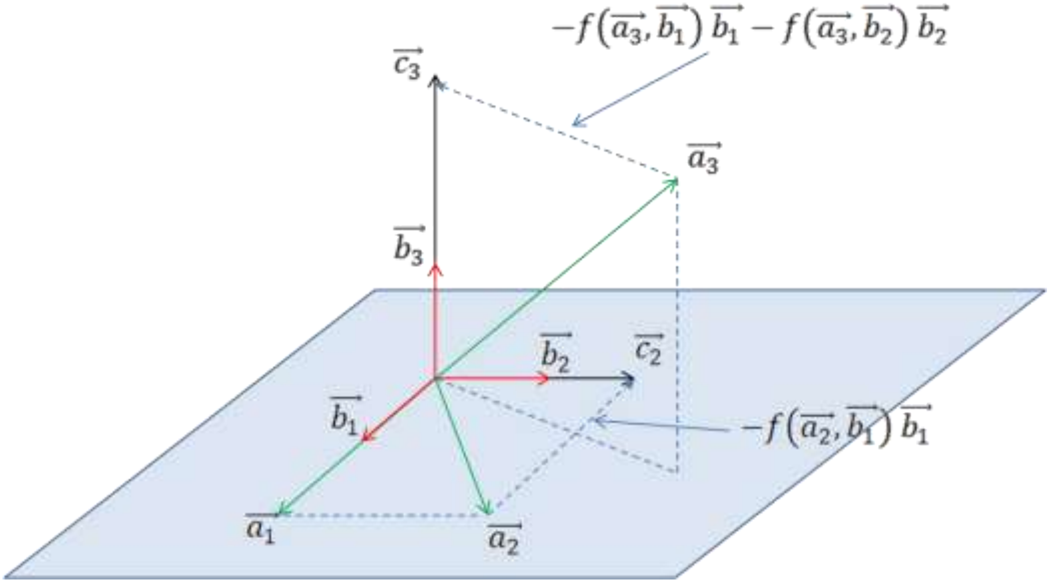
$$f(\overrightarrow{b_{n+1}}, \overrightarrow{b_k}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{c_{n+1}}\|}\left(f(\overrightarrow{a_{n+1}}, \overrightarrow{b_k}) - \sum_{l=1}^{n} f(\overrightarrow{a_{n+1}}, \overrightarrow{b_l})\,f(\overrightarrow{b_l}, \overrightarrow{b_k})\right) = 0$$

$$f(\overrightarrow{b_{n+1}}, \overrightarrow{b_{n+1}}) = 1$$

Donc $\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}, \overrightarrow{b_{n+1}}\right)$ est une famille orthonormale et :

$$Vect\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}, \overrightarrow{b_{n+1}}\right) = Vect\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n+1}}\right)$$

Ci-dessous, une illustration graphique du procédé dans $\mathbb{R}^3$



III Théorème de Pythagore

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie p associé à un produit scalaire f définissant une norme $\|\ \ \|$ alors :

$$\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{E}^2 :$$

$$\|\ \vec{u} + \vec{v}\ \|^2 = \|\ \vec{u}\ \|^2 + \|\ \vec{v}\ \|^2 + 2\, f(\vec{u}, \vec{v})$$

donc :

$$\|\ \vec{u} + \vec{v}\ \|^2 = \|\ \vec{u}\ \|^2 + \|\ \vec{v}\ \|^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Preuve :

Par bilinéarité :

$$\|\ \vec{u} + \vec{v}\ \|^2 = f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}, \vec{u}) + f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v})$$

$$= \|\ \vec{u}\ \|^2 + \|\ \vec{v}\ \|^2 + 2\, f(\vec{u}, \vec{v})$$

IV Distance à un sous espace vectoriel

Nous avions vu dans le fichier sur la topologie des espaces vectoriels normés, que la distance d'un vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie à un sous-espace vectoriel de cet espace était atteinte. Dans le cas d'un espace vectoriel euclidien, nous allons pouvoir préciser en quel vecteur du sous-espace elle est atteinte, avec la notion de projeté orthogonal.

Dans la suite, $\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel de dimension finie p associé à un produit scalaire f définissant une norme $\| \ \|$ et une distance d, $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension m, $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$ une base orthonormale de $\mathbb{F}$, obtenue par exemple par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir d'une base quelconque de $\mathbb{F}$, et complétée par le même procédé en une base orthonormale $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p})$ de $\mathbb{E}$.

1) Projeté orthogonal sur un sous-espace

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}$. Décomposons $\vec{u}$ sur la base orthonormale de $\mathbb{E}$:

$$\vec{u} = x_1 \overrightarrow{b_1} + x_2 \overrightarrow{b_2} + \cdots + x_p \overrightarrow{b_p} = f(\vec{u}, \overrightarrow{b_1}) \overrightarrow{b_1} + f(\vec{u}, \overrightarrow{b_2}) \overrightarrow{b_2} + \cdots + f(\vec{u}, \overrightarrow{b_p}) \overrightarrow{b_p}$$

Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\mathbb{F}$ est alors le vecteur :

$$\boldsymbol{p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) = x_1 \overrightarrow{b_1} + x_2 \overrightarrow{b_2} + \cdots + x_m \overrightarrow{b_m} = f(\vec{u}, \overrightarrow{b_1}) \overrightarrow{b_1} + f(\vec{u}, \overrightarrow{b_2}) \overrightarrow{b_2} + \cdots + f(\vec{u}, \overrightarrow{b_m}) \overrightarrow{b_m}}$$

Il vérifie :

$$f(\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u}), p_{\mathbb{F}}(\vec{u})) = 0$$

Autrement dit, $\boldsymbol{\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})}$ **et** $\boldsymbol{p_{\mathbb{F}}(\vec{u})}$ **sont orthogonaux**

2) Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{F}$. Nous avons :

$$\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) \in Vect\left(\overrightarrow{b_{m+1}}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p}\right)$$

$$p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) - \vec{v} \in Vect\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\right)$$

donc $\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})$ et $p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) - \vec{v}$ sont orthogonaux pour f. On peut leur appliquer le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) + p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\|^2 + \|p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) - \vec{v}\|^2$$

Soit :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\|^2 + \|p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) - \vec{v}\|^2$$

donc :

$$\vec{v} \neq p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) \quad \Rightarrow \ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 > \|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\|^2 \Rightarrow d(\vec{u}, \vec{v}) > d\left(\vec{u}, p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\right)$$

$$\vec{v} = p_{\mathbb{F}}(\vec{u}) \quad \Rightarrow \ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\|^2 \Rightarrow d(\vec{u}, \vec{v}) = d\left(\vec{u}, p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\right)$$

La distance de $\vec{u}$ à $\mathbb{F}$ est donc atteinte en un unique vecteur qui est le projeté orthogonale $p_{\mathbb{F}}(\vec{u})$ de $\vec{u}$ sur $\mathbb{F}$. Cette distance vaut alors :

$$\boldsymbol{d(\vec{u}, \mathbb{F}) = \|\vec{u} - p_{\mathbb{F}}(\vec{u})\|}$$

3) <u>Exemple d'application</u>

Posons sur $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{g(a, b, c) = \int_{-1}^{1} \frac{(t^3 + a\,t^2 + b\,t + c\,)^2}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt}$$

Nous nous proposons de déterminer :

$$\boldsymbol{Min\{g(a, b, c) :\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}}$$

Introduisons $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et montrons que la fonction suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\boldsymbol{f :\ \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}}$$

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{t}^{2}}}\, \boldsymbol{dt}$$

a) f est bien définie

Si M désigne un majorant de $|P(t)\, Q(t)|$ sur $]-1;1[$ alors sur ce dernier, on a :

$$\left|\frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$$

Or en $t=1$, nous avons :

$$\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \sim \frac{M}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

et en $t=-1$:

$$\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \sim \frac{M}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

donc l'intégrale définissant f est absolument convergente en 1 et en -1

a) f est bilinéaire

C'est trivial car par linéarité de l'intégrale impropre, pour tous polynômes P et Q, les fonctions partielles $f(.\,,Q)$ et $f(P,.)$ sont linéaires.

b) f est symétrique

C'est trivial car :

$$f(P,Q) = f(Q,P)$$

c) f est définie

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$f(P,P) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Posons :

$$\varphi(t) = \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

φ est continue et positive sur $]-1;1[$ donc :

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall\, t \in\,]-1;1[\,:\, \varphi(t) = 0$$

On en déduit :

$$\forall\, t \in\,]-1;1[\,:\, P(t) = 0$$

donc :

$$P = 0$$

d) <u>f est positive</u>

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$f(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \geq 0$$

f est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ et fait de ce dernier un espace euclidien. Nous pouvons alors interpréter g sous la forme :

$$g(a,b,c) = \|X^3 + a\,X^2 + b\,X + c\,\|^2 = \|(a\,X^2 + b\,X + c) - (-X^3)\,\|^2$$

$$= \left(d(a\,X^2 + b\,X + c, -X^3)\right)^2$$

Trouver le minimum de g et un triplet (a,b,c) en lequel il est atteint revient à se poser le même problème pour sa racine, soit :

$$h(a,b,c) = d(a\,X^2 + b\,X + c, -X^3)$$

Soit alors $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. C'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et nous avons vu que la distance d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ à ce sous-espace était atteinte de façon unique pour le projeté orthogonal de ce polynôme sur $\mathbb{R}_2[X]$. Il reste donc à déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ orthonormale pour f.

Nous pourrions construire une telle base orthonormale en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ mais il y a plus intéressant.

Effectuons en effet un changement de variable suggéré par la forme du dénominateur dans l'intégrale en posant :

$$t = \cos(u)$$

$$dt = -\sin(u)\ du$$

alors :

$$\sqrt{1-t^2} = |\sin(u)| = \sin(u) \quad \text{sur } [0;\pi]$$

$$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \int_{0}^{\pi} P(\cos(u))\,Q(\cos(u))\,du$$

Il semble alors judicieux de trouver une famille de polynômes P_n tels que :

$$\forall\, u \in [0;\pi] :\ P_n(\cos(u)) = \cos(n\,u)$$

car alors, on aurait ; pour $n \neq m$:

$$f(P_n, P_m) = \int_{0}^{\pi} P_n(\cos(u))\,P_m(\cos(u))\,du = \int_{0}^{\pi} \cos(n\,u)\ \cos(m\,u)\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \big(\cos\big((n+m)\,u\big) +\ \cos\big((n-m)\,u\big)\big)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((n+m)\,u\big)}{n+m} + \frac{\sin\big((n-m)\,u\big)}{n+m}\right]_{0}^{\pi}$$

soit :

$$f(P_n, P_m) = 0$$

Il ne resterait plus qu'à normer les vecteurs de cette famille pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ et la norme serait telle que :

$$\|P_n\|^2 = f(P_n, P_n) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (\cos(2\,n\,u) +\ 1)\,du$$

Donc pour $n \geq 1$:

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$\|P_0\| = \sqrt{\pi}$$

Voyons donc comment déterminer de tels polynômes, en rappelant l'identité trigonométrique :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

qui donne pour un entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel u :

$$\cos(n\,u) + \cos\big((n+2)\,u\big) = 2\cos\big((n+1)\,u\big)\cos(u)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\cos\big((n+2)\,u\big) = 2\cos(u)\cos\big((n+1)\,u\big) - \cos(n\,u)}}$$

La suite de polynômes cherchée vérifie donc la relation de récurrence :

$$\boxed{\boldsymbol{P_{n+2}(X) = 2\,X\,P_{n+1}(X) - P_n(X)}}$$

Et de façon triviale, pour initialiser le processus de récurrence :

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{P_0(X) = 1}\\ \boldsymbol{P_1(X) = X}\end{gathered}}$$

étant donné que :

$$\cos(0\,u) = 1$$

$$\cos(1\,u) = \cos\,(u)$$

La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est alors une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ et se détermine par récurrence :

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = X$$

$$P_2 = 2\,X\,P_1 - P_0 = 2\,X^2 - 1$$

$$P_3 = 2\,X\,P_2 - P_1 = 2\,X(2\,X^2 - 1) - X = 4\,X^3 - 3\,X$$

Reste à normer cette famille, en notant, comme vu précédemment, que :

$$\|P_0\| = \sqrt{\pi}, \qquad \|P_1\| = \|P_2\| = \|P_3\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On pose alors, pour tout $k \in [\![1;3]\!]$:

$$Q_k = \frac{1}{\|P_k\|} P_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ P_k$$

Et :

$$Q_1 = \frac{1}{\|P_1\|} P_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ P_k$$

La famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$.

La distance du polynôme $-X^3$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est atteinte pour l'unique polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est :

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3) = f(-X^3, Q_2)\ Q_2 + f(-X^3, Q_1)\ Q_1 + f(-X^3, Q_0)\ Q_0$$

et cette distance est :

$$d(-X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \left\|p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3) - (-X^3)\right\| = \left\|X^3 + p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3)\right\|$$

Soit :

$$Min\{g(a,b,c) :\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \left\|X^3 + p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3)\right\|^2$$

Procédons maintenant aux calculs, dans la base orthonormale en notant que :

$$P_3 = (4\,X^3 - 3\,X)$$

d'où il découle :

$$X^3 = \frac{1}{4}\ P_3 + \frac{3}{4}\ X = \frac{1}{4}\ P_3 + \frac{3}{4}\ P_1$$

soit :

$$-X^3 = -\frac{1}{4}\ P_3 - \frac{3}{4}\ P_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{4}\ Q_3 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\ Q_1\right)$$

Ainsi :

$$f(-X^3, Q_2) = 0$$

$$f(-X^3, Q_1) = -\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$f(-X^3, Q_0) = 0$$

d'où :

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3) = f(-X^3, Q_1)\, Q_1 = -\frac{3}{4}\, \sqrt{\pi}\, \sqrt{\frac{1}{\pi}}\; X = -\frac{3}{4}\, X$$

Or :

$$-X^3 = p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3) + f(-X^3, Q_3)\, Q_3$$

donc :

$$\left\|X^3 + p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3)\right\|^2 = \left(f(-X^3, Q_3)\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{32}$$

Nous avons alors la réponse à notre question initiale :

g atteint son minimum en

$$(a, b, c) = \left(0, -\frac{3}{4}, 0\right)$$

et ce minimum est :

$$\frac{\pi}{32}$$

<u>Remarque</u> :

Il n'est pas nécessaire de passer par la base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3). La base orthogonale (P_0, P_1, P_2, P_3) suffit.

En effet :

$$-X^3 = -\frac{1}{4}\, P_3 - \frac{3}{4}\, P_1$$

donne directement :

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3) = -\frac{3}{4}\, P_1 = -\frac{3}{4}\, X$$

$$\left\|X^3 + p_{\mathbb{R}_2[X]}(-X^3)\right\|^2 = \left\|-\frac{1}{4}\, P_3\right\|^2 = \frac{1}{16}\|P_3\|^2 = \frac{\pi}{32}$$