Espaces vectoriels généraux

I Définition

Etant donné un corps $\mathbb{K}$ (généralement $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps fini tel que ceux présentés au fichier sur la structure des nombres), on appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou plus simplement $\mathbb{K}$ espace vectoriel, un ensemble $\mathbb{V}$ d'éléments appelés vecteurs, muni d'une **loi d'addition interne** et d'une **loi de multiplication externe** avec le corps $\mathbb{K}$ ayant les propriétés pour l'addition de :

Commutativité :

$$\forall\, (\vec{u}\,,\vec{v}\,) \in \mathbb{V}^2:\ \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

Associativité :

$$\forall\, (\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\ \ ) \in \mathbb{V}^2:\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\ \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

Existence d'un élément neutre, le vecteur nul :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V}:\ \ \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

Existence d'un symétrique, l'opposé :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V}:\ \ \vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$$

Ces propriétés faisant de $\mathbb{V}$ un **groupe commutatif** pour l'addition,

Et ayant les quatre autres propriétés

Distributivité à gauche de · par rapport à +

$$\forall\, (\alpha\,,\vec{u}\,,\vec{v}\,) \in \mathbb{R}\times\mathbb{V}^2: \alpha\cdot\ (\vec{u}+\vec{v})=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v}$$

Distributivité à droite de · par rapport à +

$$\forall\, (\alpha\,,\beta\,,\vec{u}\,) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{V}:\ (\alpha+\beta)\cdot\ \vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u}$$

Associativité de · et ×

$$\forall\, (\alpha\,,\beta\,,\vec{u}\,) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{V}:\ \alpha\cdot(\beta\cdot\ \vec{u})=(\alpha\times\beta)\cdot\vec{u}$$

Existence d'un élément neutre pour la multiplication

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}:\ 1\cdot\vec{u}=\vec{u}$$

II Exemples

Reprenant les différents types de vecteurs évoqués dans le fichier « vecteurs », nous avons comme espaces vectoriels fréquemment employés :

1) $(\mathbb{R}, +, \ .)$

Les deux opérations se confondent avec les opérations sur les nombres.

Le vecteur nul est : 0

Le vecteur opposé d'un nombre x est son opposé : $-x$

2) $(\mathbb{R}^2, +, \ .)$

Le vecteur nul est le couple : $(0\,,0)$

Le vecteur opposé d'un couple $(x\,,y)$ est le couple : $(-x\,,-y)$

3) $(\boldsymbol{\mathcal{M}_{21}}(\mathbb{R}), \ +, \ .)$

Le vecteur nul est la colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur opposé d'une colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la colonne : $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

4) $(\mathbb{R}^3, +, \ .)$

Le vecteur nul est le triplet : $(0\,,0, \ 0)$

Le vecteur opposé d'un triplet $(x\,,y,z)$ est le triplet : $(-x\,,-y,-z)$

5) $(\boldsymbol{\mathcal{M}_{31}}(\mathbb{R}), \ +, \ .)$

Le vecteur nul est la colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur opposé d'une colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la colonne : $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

6) $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, +, \ .)$

Le vecteur nul est le n-uplet : $(0\,,0, \dots, 0)$

Le vecteur opposé d'un n-uplet $(\mathrm{x}_1\,, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ est le n-uplet : $(-\mathrm{x}_1\,, -\mathrm{x}_2, \dots, -\mathrm{x}_\mathrm{n})$

7) $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n1}}(\mathbb{R}),\ +,\ \ .)$

Le vecteur nul est la colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur opposé d'une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la colonne : $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

8) $(\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,\ \ .)$

Le vecteur nul est la suite nulle : $(0\ ,0,\dots,0,\dots)$

Le vecteur opposé d'une suite $(x_0\ ,x_1,\dots,x_n,\dots)$ est la suite : $(-x_0\ ,-\ x_1,\dots,-x_n,\dots)$

1) $(\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\ \ .)$

Le vecteur nul est la la fonction nulle : $x \to 0$

Le vecteur opposé d'une fonction f est la fonction : $x \to -\ f(x)$

II Sous espace vectoriel

Etant donné un sous ensemble $\mathbb{W}$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$, pour lequel on a :

$\forall\ (\vec{\mathbf{u}}\,,\vec{\mathbf{v}})\ \in \mathbb{W}^{\mathbf{2}}\ :\ \ \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\ \ \in \mathbb{W}$ **(on dit que $\mathbb{W}$ est stable pour l'addition)**

$\forall\ (\boldsymbol{\alpha},\vec{\mathbf{u}})\ \in \mathbb{K} \times \mathbb{W}\ :\ \ \boldsymbol{\alpha}\,.\ \vec{\mathbf{v}}\ \ \in \mathbb{W}$ **(on dit que $\mathbb{W}$ est stable pour la multiplication externe)**

alors $(\mathbb{W},+,\ \ .)$ est un espace vectoriel qualifié de **sous espace vectoriel** de $\mathbb{V}$

II Combinaison linéaire d'une partie finie, sous espace vectoriel engendré

Etant donnée une partie finie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$, c'est-à-dire un n-uplet de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, on appelle **combinaison linéaire** de cette partie, tout vecteur $\vec{u}$ de la forme :

$$\boxed{\vec{u} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n}}$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la partie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{V}$ appelée **sous espace vectoriel engendré par cette partie**. On le note :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}) = \{x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} \ : \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}}$$

III Partie finie libre- partie finie liée

Etant donnée une partie finie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$, on dit que cette partie est **libre** si elle possède un seul vecteur qui est non nul ou bien, dans le cas contraire, si aucun des vecteurs de cette partie n'est combinaison linéaire des autres.

Une partie qui n'est pas libre est dite **liée**.

Théorème :

$$\boxed{(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}})\ \textbf{libre} \Leftrightarrow \forall\,(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{n}} : \mathbf{x_1}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mathbf{x_2}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \mathbf{x_n}\,\overrightarrow{\mathbf{e_n}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} = \cdots = \mathbf{x_n} = \mathbf{0}}$$

Ce théorème est essentiel en pratique pour déterminer si une partie finie est libre ou liée. Nous allons le démontrer en premier, dans le cas d'une partie à deux éléments, puis à trois éléments, avant de généraliser.

Cas d'une partie à deux éléments $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

$(\Rightarrow)$ Supposons $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ libre et raisonnons par l'absurde en supposant :

$\exists\ (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} = \vec{0}$ et $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

Alors : $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$

Dans le premier cas on a:

$$\overrightarrow{e_1} = -\frac{x_2}{x_1}\,\overrightarrow{e_2}$$

Et dans le second cas :

$$\overrightarrow{e_2} = -\frac{x_1}{x_2}\,\overrightarrow{e_1}$$

Dans les deux cas, un vecteur est combinaison linéaire de l'autre et donc $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est liée, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

$(\Leftarrow)$ Supposons : $\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Et supposons par l'absurde que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ soit liée. Alors : $\exists\ \alpha \in \mathbb{K} : \overrightarrow{e_1} = \alpha\,\overrightarrow{e_2}$ ou $\overrightarrow{e_2} = \alpha\,\overrightarrow{e_1}$

Donc : $\overrightarrow{e_1} - \alpha\,\overrightarrow{e_2} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{e_2} - \alpha\,\overrightarrow{e_1} = \vec{0}$

Dans les deux cas : $\exists\ (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 :$ $x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} = \vec{0}$ et $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

En effet dans le premier cas, il suffit de prendre : $(x_1, x_2) = (1, -\alpha)$ et dans le second : $(x_1, x_2) = (-\alpha, 1)$

Cela contredit l'hypothèse de départ

Cas d'une partie à trois éléments $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

$(\Rightarrow)$ Supposons $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ libre et raisonnons par l'absurde en supposant :

$\exists\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$ et $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$

Alors : $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$ ou $x_3 \neq 0$

Dans le premier cas on a:

$$\overrightarrow{e_1} = -\frac{x_2}{x_1}\,\overrightarrow{e_2} - \frac{x_3}{x_1}\,\overrightarrow{e_3}$$

dans le second cas :

$$\overrightarrow{e_2} = -\frac{x_1}{x_2}\,\overrightarrow{e_1} - \frac{x_3}{x_2}\,\overrightarrow{e_3}$$

dans le troisième cas :

$$\overrightarrow{e_3} = -\frac{x_1}{x_3}\,\overrightarrow{e_1} - \frac{x_2}{x_3}\,\overrightarrow{e_2}$$

Dans les trois cas, un vecteur est combinaison linéaire des deux autres et donc $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une partie liée, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

$(\Leftarrow)$ Supposons : $\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Et supposons par l'absurde que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit liée. Alors : $\exists\,\alpha \in \mathbb{K} :\ \overrightarrow{e_1} = \alpha\,\overrightarrow{e_2} + \beta\,\overrightarrow{e_3}$ ou $\overrightarrow{e_2} = \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_3}$ ou $\overrightarrow{e_3} = \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2}$

Donc : $\overrightarrow{e_1} - \alpha\,\overrightarrow{e_2} - \beta\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{e_2} - \alpha\,\overrightarrow{e_1} - \beta\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{e_3} - \alpha\,\overrightarrow{e_1} - \beta\,\overrightarrow{e_2}$

Dans les trois cas : $\exists\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 :\ x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$ et $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$

Cela contredit l'hypothèse de départ

<u>Cas d'une partie à n éléments $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$:</u>

Il suffit de raisonner de façon analogue au cas précédent par disjonction de cas.

IV Partie finie génératrice

Etant donnée une partie finie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$, on dit que cette partie est **génératrice**, si tout vecteur de $\mathbb{V}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette partie, autrement dit :

$$\boxed{(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}})\ \textbf{génératrice} \Leftrightarrow \forall\,\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V} :\ \exists\,(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{n}} :\ \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{x_1}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mathbf{x_2}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \mathbf{x_n}\,\overrightarrow{\mathbf{e_n}}}$$

Notons tout de suite que si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est génératrice alors quelque soit le ou les vecteurs ajoutés, la partie restera génératrice. En effet si on ajoute $\overrightarrow{e_{n+1}}$, et si on a : $\vec{u} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n}$, on peut toujours l'écrire : $\vec{u} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} + 0\,\overrightarrow{e_{n+1}}$

Autrement dit :

Toute sur partie d'une partie génératrice est une partie génératrice.

Il n'en va pas de même d'une sous partie d'une partie génératrice qui peut être, selon les cas, génératrice ou non, comme le montre ces deux exemples dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1 :

La partie $\big((1\,,0)\,;\ (0\,,1)\big)$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$ car pour tout couple (x,y) on a :

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}\,(1\,,0) + \mathrm{y}\,(0\,,1)$$

En revanche, la sous partie formée par l'unique couple $(1\,,0)$ n'est pas génératrice, sinon on aurait :

$$(0\,,1) = \mathrm{x}\ \ (1\,,0)$$

Soit :

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{x} \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Ce qui est absurde.

Exemple 2 :

La partie $\big((1\,,0)\,;\ (0\,,1)\,;\ (1\,,1)\big)$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$ car c'est une sur partie de $\big((1\,,0)\,;\ (0\,,1)\big)$

La sous partie dont elle est la sur partie est également génératrice

Une partie finie telle qu'il existe une sous partie génératrice est appelée **partie surgénératrice**.

Une propriété importante est alors la suivante :

De toute partie génératrice $\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,,\ \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,, \dots \overrightarrow{\mathbf{e_p}}\right)$ de on peut extraire une partie libre et génératrice de $\mathbb{E}$

Preuve :

Si $\overrightarrow{\mathrm{e_1}}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs, on l'enlève de la partie pour former une nouvelle partie, sinon on le conserve. On réitère le procédé avec le vecteur suivant.

V Sous espace somme-sommes directe – sous espaces supplémentaires

Etant donnés $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$ deux sous espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ espace vectoriel , on définit la somme de $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$ comme étant :

$$\boxed{\mathbb{V} + \mathbb{W} = \{\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \ : \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \ , \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W}\}}$$

$\mathbb{V} + \mathbb{W}$ **est alors un sous espace vectoriel de** $\mathbb{E}$

Si, de plus, $\mathbb{V} \cap \mathbb{W} = \{\vec{0}\}$**, la somme est dite directe et notée :** $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$

Si, de plus : $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{E}$ **,** $\mathbb{V}$ **et** $\mathbb{W}$ **sont dits supplémentaires**

Preuve de : $\mathbb{V} + \mathbb{W}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$:

- Stabilité de l'addition :

Soit : $(\vec{u}, \vec{u}') \in (\mathbb{V} + \mathbb{W})^2$ alors : $\exists\ (\vec{v}, \vec{v}', \vec{w}, \vec{w}') \in \mathbb{V}^2 \times \mathbb{W}^2 : \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{u}' = \vec{v}' + \vec{w}'$

alors : $\vec{u} + \vec{u}' = (\vec{v} + \vec{w}) + (\vec{v}' + \vec{w}') = (\vec{v} + \vec{v}') + (\vec{w} + \vec{w}')$

Or : $\vec{v} + \vec{v}' \in \mathbb{V}$ et $\vec{w} + \vec{w}' \in \mathbb{W}$

donc : $\vec{u} + \vec{u}' \in \mathbb{V} + \mathbb{W}$

- Stabilité de la multiplication externe :

Soit : $(\vec{u}, \ \alpha) \in \mathbb{V} \times \mathbb{K}$ alors **:** $\exists\ (\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W} \ : \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

alors : $\alpha\,\vec{u} = \alpha\,(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\,\vec{v} + \alpha\,\vec{w}$

Or : $\alpha\,\vec{v} \in \mathbb{V}$ et $\alpha\,\vec{w} \in \mathbb{W}$

donc : $\alpha\,\vec{u} \in \mathbb{V} + \mathbb{W}$

Exemples de sous espaces en somme directe :

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$:

$\mathbb{V} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big) = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{W} = \mathrm{Vect}\big((1,2,3)\big) = \{(\mathrm{x}, 2\,\mathrm{x}, 3\,\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \{(\mathrm{x},\mathrm{x},\mathrm{x}) + (\mathrm{y}, 2\,\mathrm{y}, 3\,\mathrm{y}) \ : \ (\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\mathrm{x}+\mathrm{y}\,, \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}\,, \mathrm{x}+3\,\mathrm{y}) \ : \ (\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\}$

D'un point de vue géométrique, en représentant un vecteur par un point de l'espace muni d'un repère orthonormé, $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$ sont deux droites sécantes en l'origine et $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ le plan engendré par ces deux droites.

Exemples de sous espaces supplémentaires :

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$:

$\mathbb{V} = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big) = \{(\mathrm{x},\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{W} = \mathrm{Vect}\big((1,2)\big) = \{(\mathrm{x}, 2\,\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \{(\mathrm{x},\mathrm{x}) + (\mathrm{y}, 2\,\mathrm{y}) \ : \ (\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\mathrm{x}+\mathrm{y}\,, \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}) \ : \ (\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{E}$

VI Sous espace somme-généralisation

Etant donnés $(\mathbb{V}_i)_{i=1\text{ à }n}$ une famille finie de n sous espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ espace vectoriel, on définit la somme $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i$ comme étant :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{v_n}} : \ (\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}) \in \mathbb{V}_{\mathbf{1}} \times \mathbb{V}_{\mathbf{2}} \times \ldots \times \mathbb{V}_{\mathbf{n}} \ \}}$$

$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i$ est alors un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

Si, de plus, $\forall\, i \in [[1; n]] : \mathbb{V}_i \cap \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{V}_j = \{\vec{0}\}$, la somme est dite directe et notée :

$\mathbb{V}_{\mathbf{1}} \oplus \mathbb{V}_{\mathbf{2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_{\mathbf{n}}$

Si, de plus :
$\mathbb{V}_{\mathbf{1}} \oplus \mathbb{V}_{\mathbf{2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}$, les sous espaces $\mathbb{V}_i$ sont dits supplémentaires.

Preuve de $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i$ est alors un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

La preuve est à calquer sur la précédente.

Exemple de trois sous espaces supplémentaires :

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$:

$\mathbb{V}_1 = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V}_2 = \mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big) = \{(0,2\,\mathrm{x}, 0) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V}_3 = \mathrm{Vect}\big((0,0,1)\big) = \{(0,0, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \mathbb{V}_3 &= \{(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{x}) + (0, \mathrm{y}, 0) + (0, 0, \mathrm{z}) : (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(\mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{x} + \mathrm{z}) : (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

D’un point de vue géométrique, $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ sont trois droites non coplanaires sécantes en l’origine et leur somme engendre l’espace tout entier.

Exemple de n sous espaces supplémentaires :

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$:

$\mathbb{V}_1 = \mathrm{Vect}\big((1,0, \dots, 0)\big) = \{(\mathrm{x}, 0, \dots, 0) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V}_2 = \mathrm{Vect}\big((0,1, \dots, 0)\big) = \{(0, \mathrm{x}, \dots, 0) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{V}_\mathrm{n} = \mathrm{Vect}\big((0,0, \dots, 1)\big) = \{(0,0, \dots, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

nous avons :

$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_\mathrm{n} = \mathbb{R}^n$