Espaces vectoriels de dimension finie

I Bases

Etant donnée une partie finie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$, on dit que cette partie est **une base**, si tout vecteur de $\mathbb{V}$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de cette partie, autrement dit :

$$\boxed{(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}) \textbf{ base} \Leftrightarrow \forall \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V} : \exists! \ (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{n}} : \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{x_1} \overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mathbf{x_2} \overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \dots + \mathbf{x_n} \overrightarrow{\mathbf{e_n}}}$$

<u>Théorème</u> :

$$\boxed{(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}) \textbf{ base} \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}) \textbf{ libre et génératrice}}$$

<u>Preuve</u> :

$(\Rightarrow)$ Supposons $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ base de $\mathbb{V}$ alors par définition la partie est génératrice. Montrons alors qu'elle est libre.

Supposons : $x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n} = \vec{0}$

Puisque : $0 \overrightarrow{e_1} + 0 \overrightarrow{e_2} + \dots + 0 \overrightarrow{e_n} = \vec{0}$

D'après l'unicité des composantes contenue dans la définition de la base, on en déduit :

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Ce qui prouve que la partie est libre

$(\Leftarrow)$ Supposons $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ libre et génératrice alors, puisqu'elle est génératrice, on a :

$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \exists \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \vec{u} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$

Montrons l'unicité de cette décomposition en supposant avoir également :

$\exists \ (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \mathbb{K}^n : \vec{u} = x'_1 \overrightarrow{e_1} + x'_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + x'_n \overrightarrow{e_n}$

alors :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1}+x_2\,\overrightarrow{e_2}+\cdots+x_n\,\overrightarrow{e_n}=x'_1\,\overrightarrow{e_1}+x'_2\,\overrightarrow{e_2}+\cdots+x'_n\,\overrightarrow{e_n}$$

Soit, en passant tout dans le membre de gauche :

$$(x_1-x'_1)\,\overrightarrow{e_1}+(x_2-x'_2)\,\overrightarrow{e_2}+\cdots+(x_n-x'_n)\,\overrightarrow{e_n}=\vec{0}$$

Le caractère libre de la partie conduit alors à :

$$x_1-x'_1=x_2-x'_2=\cdots=x_n-x'_n=0$$

Soit :

$$x_1=x'_1\,,x_2=x'_2\ ,\qquad \dots\ x_n=x'_n$$

Il en résulte l'unicité

II Exemples de bases pour différents espaces vectoriels

1) $(\mathbb{R},+,\ .)$

La partie réduit au nombre 1 est une base.

2) $(\mathbb{R}^{\mathbf{2}},+,\ .)$

La partie à deux vecteurs $\big((1\,,0)\ ;\ (0\,,1)\big)$ est une base dite canonique

3) $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{21}}(\mathbb{R}),\ +,\ .)$

La partie à deux colonnes $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base dite canonique

4) $(\mathbb{R}^{\mathbf{3}},+,\ .)$

La partie à trois vecteurs $\big((1\,,\ 0\ ,\ 0)\ ;\ (0\,,\ 1\ ,\ 0)\ ;\ (0\,,\ 0\ ,\ 1)\ \big)$ est une base dite canonique

5) $(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{31}}(\mathbb{R}),\ +,\ .)$

La partie à trois colonnes $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ;\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base dite canonique

6) $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},+,\ .)$

La partie à n vecteurs $\big((1\,,\ 0\ ,\dots,\ 0)\ ;\ (0\,,\ 1\ ,\dots,\ 0)\ ;\dots\ (0\,,\ 0\ ,\dots,1)\ \big)$ est une base dite canonique

7) $(\mathcal{M}_{\mathbf{n1}}(\mathbb{R}),\ +,\ \ .)$

La partie à n colonnes $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix};\dots\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base dite canonique

8) $(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,\ \ .)$

Nous verrons plus tard qu'il n'y a pas de base

1) $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\ \ .)$

De même, il n'y a pas de base

III Le théorème de la dimension

Etant donné un espace vectoriel $\mathbb{V}$ possédant une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})$ à $\mathbf{n}$ éléments, alors toute partie finie de $\mathbb{V}$, qui est une base, a également $\mathbf{n}$ éléments. Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases est appelé dimension de $\mathbb{V}$.

Ce théorème est l'un des plus importants de l'algèbre vectorielle. Pour le démontrer, nous allons commencer par établir un préliminaire, inspiré des vecteurs géométriques. En effet, dans l'espace qui est de dimension 3, nous constatons que, ce qui fait qu'une partie formée de trois vecteurs est une base, est son caractère libre, d'où le préliminaire.

Préliminaire :

Etant donné un espace vectoriel $\mathbb{V}$ possédant une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})$ à $\mathbf{n}$ éléments, alors toute partie finie libre de $\mathbb{V}$ ayant $\mathbf{n}$ éléments est une partie génératrice de $\mathbb{V}$

Preuve du préliminaire :

Nous allons commencer par étudier le cas où $\mathbb{V}$ possède une base à un élément puis celui où il possède une base à deux éléments avant de généraliser par récurrence.

1er cas : $\mathbb{V}$ possède une base à un élément $(\overrightarrow{\varepsilon_1})$:

Soit $(\overrightarrow{e_1})$ une partie libre à un élément de $\mathbb{V}$ alors $\overrightarrow{e_1}$ est un vecteur non nul.

$(\overrightarrow{\varepsilon_1})$ étant une base, est génératrice et on a : $\exists\ \alpha \in \mathbb{K}\ :\ \overrightarrow{e_1} = \alpha\, \overrightarrow{\varepsilon_1}$

$\overrightarrow{e_1}$ n'étant pas le vecteur nul, on a : $\alpha \neq 0$ et donc :

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{e_1}$$

Soit alors un vecteur quelconque $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$, on a : $\exists\ x_1 \in \mathbb{K} : \ \vec{u} = x_1\, \overrightarrow{\varepsilon_1}$

Donc :

$$\vec{u} = x_1\, \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{e_1} = \frac{x_1}{\alpha}\, \overrightarrow{e_1}$$

Donc : $\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \ \exists\, y_1 \in \mathbb{K} \ : \ \vec{u} = y_1\, \overrightarrow{e_1}$

Cela montre que $(\overrightarrow{e_1})$ est une partie génératrice de $\mathbb{V}$

<u>2ème cas : $\mathbb{V}$ possède une base à deux éléments $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\,,\ \overrightarrow{\varepsilon_2})$</u> :

Soit $(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$ une partie libre à deux éléments de $\mathbb{V}$.

Traduisons le fait que $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\,,\ \overrightarrow{\varepsilon_2})$ est une partie génératrice :

$$\exists\ (a_{11}\,, a_{12}\,, a_{21}\,, a_{22}) \in \mathbb{K}^4 : \begin{cases} \overrightarrow{e_1} = a_{11}\, \overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{12}\, \overrightarrow{\varepsilon_2} \\ \overrightarrow{e_2} = a_{21}\, \overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{22}\, \overrightarrow{\varepsilon_2} \end{cases}$$

$\overrightarrow{e_1}$ n'étant pas nul, nous avons : $a_{11} \neq 0$ ou $a_{12} \neq 0$

<u>1er sous cas : $a_{11} \neq 0$</u>

Nous pouvons rendre le système triangulaire par la méthode du pivot de Gauss en procédant ainsi : Nous conservons la première relation et nous remplaçons la seconde par une combinaison de la seconde et de la première avec les coefficients respectifs a_{11} et $-a_{21}$ afin d'éliminer $\overrightarrow{\varepsilon_1}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = a_{11}\, \overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{12}\, \overrightarrow{\varepsilon_2} \\ a_{11}\, \overrightarrow{e_2} - a_{21}\, \overrightarrow{e_1} = (a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, \overrightarrow{\varepsilon_2} \end{cases}$$

Montrons alors par l'absurde, que le coefficient de $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ dans la seconde relation ne peut être nul.

Supposons donc : $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} = 0$

alors : $a_{11}\, \overrightarrow{e_2} - a_{21}\, \overrightarrow{e_1} = \vec{0}$

mais, puisque $(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$ est une partie libre : $a_{11} = -a_{21} = 0$

cela contredit $a_{11} \neq 0$

il en résulte : $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} \neq 0$

ainsi :

$$\overrightarrow{\varepsilon_2} = \frac{a_{11}}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}\,\overrightarrow{e_2} - \frac{a_{21}}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}\,\overrightarrow{e_1}$$

Donc : $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ est combinaison linéaire de $(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$ ce qu'on peut écrire :

$$\overrightarrow{\varepsilon_2} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$$

Or la première relation du système conduit à :

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{1}{a_{11}}\,\overrightarrow{e_1} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\,\overrightarrow{\varepsilon_2}$$

Donc, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$ étant un espace vectoriel contenant $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$$

Toute vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$ étant combinaison linéaire de $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\ ,\overrightarrow{\varepsilon_2}\ )$ est donc dans $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$

Ainsi, $(\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2}\ )$ est une partie génératrice de $\mathbb{V}$

<u>2ème sous cas : $a_{12} \neq 0$</u>

Ce cas se traite comme le précédent, il suffit de permuter les vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$

<u>3ème cas : Cas général</u>

Nous allons démontrer la propriété $\mathrm{P_n}$ suivante, par récurrence sur n , $\mathrm{n} \geq 1$:

« Si $\mathbb{V}$ possède une base à $\mathbf{n}$ éléments $(\overrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon_1}}\ ,\ \overrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon_2}}\ , \ldots \overrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon_n}})$ alors toute partie libre $(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\ ,\ \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\ , \ldots \overrightarrow{\mathbf{e_n}})$ à $\mathbf{n}$ éléments de $\mathbb{V}$ est génératrice »

Notons que la propriété a été initialisée, puisque nous avons montré que $\mathrm{P_1}$ et $\mathrm{P_2}$ étaient vraies. Il reste donc à montrer l'hérédité en supposant $\mathrm{P_n}$ vraie pour un entier $\mathrm{n} \geq 1$ et en montrant que $\mathrm{P_{n+1}}$ est vraie.

Supposons donc que possède une base à $(\mathrm{n}+1)$ éléments $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\ ,\ \overrightarrow{\varepsilon_2}\ , \ldots \overrightarrow{\varepsilon_n}\ ,\ \overrightarrow{\varepsilon_{n+1}}\ )$ et considérons une partie libre à $(\mathrm{n}+1)$ éléments $(\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\ , \ldots \overrightarrow{e_n}\ ,\ \overrightarrow{e_{n+1}}\ )$

Traduisons le fait que $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\ ,\ \overrightarrow{\varepsilon_2}\ , \ldots \overrightarrow{\varepsilon_n}\ ,\ \overrightarrow{\varepsilon_{n+1}}\ )$ est génératrice, en exprimant les vecteurs de $(\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\ , \ldots \overrightarrow{e_n}\ ,\ \overrightarrow{e_{n+1}}\ )$ sur cette partie :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = a_{11}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{12}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a_{1n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a_{1(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ \overrightarrow{e_2} = a_{21}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{22}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a_{2n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a_{2(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} = a_{n1}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{n2}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a_{nn}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a_{n(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ \overrightarrow{e_{n+1}} = a_{(n+1)1}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{(n+1)2}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a_{(n+1)n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a_{(n+1)(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \end{cases}$$

Là encore, nous allons procéder à une disjonction de cas.

Puisque $\overrightarrow{e_1}$ n'est pas le vecteur nul, l'une de ses composantes au moins n'est pas nulle et nous traiterons uniquement le cas où c'est a_{11}qui n'est pas nul, les autres se déduisant par permutation des $\overrightarrow{\varepsilon_i}$

Nous pouvons alors utiliser la première ligne pour modifier les suivantes comme suit, en effectuant des combinaisons pour éliminer $\overrightarrow{\varepsilon_1}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = a_{11}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} + a_{12}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a_{1n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a_{1(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ a_{11}\,\overrightarrow{e_2} - a_{21}\overrightarrow{e_1} = a'_{22}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a'_{2n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a'_{2(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ \vdots \\ a_{11}\,\overrightarrow{e_n} - a_{n1}\overrightarrow{e_1} = a'_{n2}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a'_{nn}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a'_{n(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \\ a_{11}\,\overrightarrow{e_{n+1}} - a_{(n+1)1}\overrightarrow{e_1} = a'_{(n+1)2}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cdots + a'_{(n+1)n}\,\overrightarrow{\varepsilon_n} + a'_{(n+1)(n+1)}\,\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}} \end{cases}$$

Notons $\overrightarrow{e_2}' = a_{11}\,\overrightarrow{e_2} - a_{21}\overrightarrow{e_1}$, … , $\overrightarrow{e_n}' = a_{11}\,\overrightarrow{e_n} - a_{n1}\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_{n+1}}' = a_{11}\,\overrightarrow{e_{n+1}} - a_{(n+1)1}\overrightarrow{e_1}$

et montrons que ces n vecteurs forment une partie libre du sous espace vectoriel $\mathbb{W} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ auquel ils appartiennent, en notant au passage que la partie $(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ à n éléments est une base de $\mathbb{W}$.

Partons pour cela de :

$$x_2\,\overrightarrow{e_2}' + \cdots x_n\,\overrightarrow{e_n}' + x_{n+1}\,\overrightarrow{e_{n+1}}' = \vec{0}$$

Soit :

$$x_2\,(a_{11}\,\overrightarrow{e_2} - a_{21}\overrightarrow{e_1}) + \cdots x_n\,(a_{11}\,\overrightarrow{e_n} - a_{n1}\overrightarrow{e_1}) + x_{n+1}\left(a_{11}\,\overrightarrow{e_{n+1}} - a_{(n+1)1}\overrightarrow{e_1}\right) = \vec{0}$$

$$\left(-x_2\,a_{21} - \cdots - x_n\,a_{n1} - x_{n+1}\,a_{(n+1)1}\right)\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,a_{11}\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\,a_{11}\,\overrightarrow{e_n} + x_{n+1}\,a_{11}\,\overrightarrow{e_{n+1}} = \vec{0}$$

Alors, puisque $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$ est une partie libre :

$$-x_2\,a_{21} - \cdots - x_n\,a_{n1} - x_{n+1}\,a_{(n+1)1} = x_2\,a_{11} = \cdots = x_n\,a_{11} = x_{n+1}\,a_{11} = 0$$

Ce qui entraîne, compte tenu de $a_{11} \neq 0$: $x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$

La partie $\left(\overrightarrow{e_2}', \ldots \overrightarrow{e_n}', \overrightarrow{e_{n+1}}'\right)$ est donc bien une partie libre à n éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{W}$ possédant une base à n éléments. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{W}$.

Chaque vecteur de la partie $(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \ldots \overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_{n+1}})$ est donc combinaison linéaire de la partie $\left(\overrightarrow{e_2}', \ldots \overrightarrow{e_n}', \overrightarrow{e_{n+1}}'\right)$ donc de la partie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$

Or, nous déduisions de la première relation du système :

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{1}{a_{11}}\overrightarrow{e_1} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\overrightarrow{\varepsilon_2} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\overrightarrow{\varepsilon_n} - \frac{a_{1(n+1)}}{a_{11}}\overrightarrow{\varepsilon_{n+1}}$$

On en tire que $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ est également combinaison linéaire de la partie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$

Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$ étant combinaison linéaire de la partie $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \ldots \overrightarrow{\varepsilon_n}, \overrightarrow{\varepsilon_{n+1}})$ le sera donc de la partie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$ qui est donc, de ce fait, génératrice de $\mathbb{V}$

IV Le théorème de la base incomplète

Préliminaire :

Etant donné un espace vectoriel $\mathbb{V}$ possédant une base $(\overrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon_2}}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{\epsilon_n}})$ à $\mathbf{n}$ éléments, donc de dimension n, si $\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots \overrightarrow{\mathbf{e_p}}\right)$ est une partie libre alors $\mathbf{p} \leq \mathbf{n}$.

Théorème

Si de plus $\mathbf{p} < \mathbf{n}$ alors $\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots \overrightarrow{\mathbf{e_p}}\right)$ peut être complétée en une base $\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots \overrightarrow{\mathbf{e_p}}, \ldots \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right)$ de $\mathbb{V}$

Preuve du préliminaire

Nous allons, pour le premier point, raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une partie libre $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_p}\right)$ ayant plus d'éléments que la base, soit $p > n$. Alors la sous partie $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n}\right)$ est une partie libre à n éléments, c'est donc une partie génératrice de $\mathbb{V}$, d'après le théorème précédent. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{e_p}$ est combinaison linéaire de cette sous partie. Cela contredit le caractère libre de $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_p}\right)$.

Preuve du théorème

Commençons par montrer, par l'absurde, que $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\,)$ ne peut pas être génératrice lorsque $p < n$. En effet, si tel était le cas, nous aurions le fait que $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\,)$ est une base de $\mathbb{V}$, donc, la partie $(\overrightarrow{\varepsilon_1}\,, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})$ étant libre, nous devrions avoir, d'après le préliminaire : $n < p$, ce qui est contradictoire.

Il existe donc un vecteur non nul de $\mathbb{V}$ qui n'est pas combinaison linéaire de $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\,)$. Notons le $\overrightarrow{e_{p+1}}$. Montrons alors que la partie $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+1}}\,)$ est libre, en supposant :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \ \dots + x_p\,\overrightarrow{e_p}\ \ + x_{p+1}\,\overrightarrow{e_{p+1}} = \vec{0}$$

Supposons alors par l'absurde : $x_{2p+1} \neq 0$ alors :

$$\overrightarrow{e_{p+1}} = \frac{-\,x_1}{x_{p+1}}\,\overrightarrow{e_1} + \frac{-\,x_2}{x_{p+1}}\,\overrightarrow{e_2} + \ \dots + \frac{-\,x_p}{x_{p+1}}\,\overrightarrow{e_p}$$

donc $\overrightarrow{e_{p+1}}$ est combinaison linéaire de $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\,)$, ce qui est contradictoire.

On a alors bien : $x_{p+1} = 0$ et il en découle :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \ \dots + x_p\,\overrightarrow{e_p}\ = \vec{0}$$

donc : $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x_{p+1} = 0$

d'où $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+1}}\,)$ libre

si $p + 1 < n$ on reprend le procédé en déterminant $\overrightarrow{e_{p+2}}$ tel que $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+1}}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+2}})$ et on réitère ce procédé pour construire une partie libre $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,, \dots \overrightarrow{e_p}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+1}}\ ,\ \overrightarrow{e_{p+2}}\,, \dots ,\ \overrightarrow{e_{p+k}})$ avec $p + k = n$. Cette partie libre à n éléments est alors une base de $\mathbb{V}$.

V Dimension d'un sous espace vectoriel

Etant donné un sous espace vectoriel $\mathbb{V}$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, on a :

$\mathbb{V}$ est de dimension finie et $\mathbf{dim}(\mathbb{V}) \leq \mathbf{dim}(\mathbb{E})$

Si $\mathbf{dim}(\mathbb{V}) = \mathbf{dim}(\mathbb{E})$ alors $\mathbb{V} = \mathbb{E}$

Preuve de $\mathbb{V}$ est de dimension finie

Faisons une disjonction de cas.

1er cas : $\mathbb{V} = \{\vec{0}\}$

$\dim(\mathbb{V}) = 0 \leq \dim(\mathbb{E})$

2èmer cas : $\mathbb{V} \neq \{\vec{0}\}$

Alors : $\exists\, \overrightarrow{e_1} \in \mathbb{V} :\ \overrightarrow{e_1} \neq \vec{0}$

1er sous cas : $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ (\overrightarrow{e_1}, \vec{u})$ partie liée

Soit $\vec{u} \in \mathbb{V}\backslash\{\vec{0}\}$ alors on a : $\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \backslash(0{,}0) :\ \alpha\ \overrightarrow{e_1} + \beta\ \vec{u} = \vec{0}$

Montrons par l'absurde : $\beta \neq \vec{0}$

Supposons donc : $\beta = 0$ alors : $\alpha\ \overrightarrow{e_1} = \vec{0}$ et donc $\alpha = 0$ ce qui est contradictoire

On en déduit :

$$\vec{u} = -\frac{\alpha}{\beta}\ \overrightarrow{e_1}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ est donc un vecteur générateur de $\mathbb{V}$, donc constitue une base de $\mathbb{V}$

Ainsi $\mathbb{V}$ est de dimension 1 et comme $\mathbb{E} \neq \{\vec{0}\}$, $\dim(\mathbb{E}) \geq 1$, donc $\dim(\mathbb{V}) \leq \dim(\mathbb{E})$

2ème sous cas : $\exists\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ (\overrightarrow{e_1}, \vec{u})$ partie libre

Notons ainsi $\overrightarrow{e_2}$ un vecteur de $\mathbb{V}$ tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ soit une partie libre.

On réitère alors le procédé par disjonction des deux cas :

- $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{u})$ partie liée
- $\exists\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{u})$ partie libre

Dans le premier cas, on en déduit facilement que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une partie génératrice, donc une base de $\mathbb{V}$, et dans le second cas on peut trouver une partie libre $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{V}$

Par récurrence sur le procédé, on finit par trouver une partie libre $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ à p éléments de $\mathbb{V}$ qui soit également une partie génératrice de $\mathbb{V}$, car il n'existe aucune partie libre de plus de n éléments dans $\mathbb{E}$, n étant la dimension de $\mathbb{E}$.

Preuve de $\dim(\mathbb{V}) \leq \dim(\mathbb{E})$

$\mathbb{V}$ étant de dimension finie, soit $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right)$ une base de $\mathbb{V}$. D'après le théorème de la base incomplète, puisque c'est une partie libre de $\mathbb{E}$ on peut la compléter en une base de $\mathbb{E}$.

Ainsi : $\dim(\mathbb{V}) \leq \dim(\mathbb{E})$

Preuve de : Si $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{E})$ alors $\mathbb{V} = \mathbb{E}$

Supposons $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{E}) = \mathrm{n}$

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{V}$. Puisque c'est une partie libre à n éléments de $\mathbb{E}$, c'est donc une base de $\mathbb{E}$. Tout vecteur de $\mathbb{E}$ peut donc être engendré par cette partie et se trouve de ce fait appartenir à $\mathbb{V}$, d'où $\mathbb{V} = \mathbb{E}$

VI Dimension d'une somme de sous espaces

Etant donnés $(\mathbb{V}_i)_{i=1 \text{ à } p}$ une famille finie de p sous espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, alors :

$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \cdots + \mathbb{V}_p$ **est de dimension finie et**

$$\mathbf{dim}\left(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \cdots + \mathbb{V}_p\right) \leq \mathbf{dim}(\mathbb{V}_1) + \mathbf{dim}(\mathbb{V}_2) + \cdots + \mathbf{dim}\left(\mathbb{V}_p\right)$$

Si la somme est directe alors :

$$\mathbf{dim}\left(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_p\right) = \mathbf{dim}(\mathbb{V}_1) + \mathbf{dim}(\mathbb{V}_2) + \cdots + \mathbf{dim}\left(\mathbb{V}_p\right)$$

Et Dans le cas particulier d'une somme de deux sous espaces on a :

$$\mathbf{dim}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \mathbf{dim}(\mathbb{V}_1) + \mathbf{dim}(\mathbb{V}_2) - \mathbf{dim}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$$

Preuve :

Soit :

$\left(\overrightarrow{e_{11}}, \overrightarrow{e_{12}}, \ldots, \overrightarrow{e_{1n_1}}\right)$ une base de $\mathbb{V}_1$

$\left(\overrightarrow{e_{21}}, \overrightarrow{e_{22}}, \ldots, \overrightarrow{e_{2n_2}}\right)$ une base de $\mathbb{V}_2$

$\vdots$

$\left(\overrightarrow{e_{p1}}, \overrightarrow{e_{p2}}, \ldots, \overrightarrow{e_{pn_p}}\right)$ une base de $\mathbb{V}_p$

alors la partie obtenue par réunion de ces bases est une partie génératrice de $\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2+\cdots+\mathbb{V}_p$. De cette partie éventuellement surgénératrice, on peut extraire une sous partie libre et génératrice qui sera donc une base de $\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2+\cdots+\mathbb{V}_p$. Ainsi :

$$\dim\left(\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2+\cdots+\mathbb{V}_p\right) \leq \dim(\mathbb{V}_1)+\dim(\mathbb{V}_2)+\cdots+\dim\left(\mathbb{V}_p\right)$$

Si la somme est directe, montrons que la partie obtenue par union des bases est libre :

Partons pour cela d'une combinaison linéaire nulle :

$$\left(x_{11}\,\overrightarrow{e_{11}}+x_{12}\,\overrightarrow{e_{12}}+\ \ldots+x_{1n_1}\,\overrightarrow{e_{1n_1}}\right)+\left(x_{21}\,\overrightarrow{e_{21}}+x_{22}\,\overrightarrow{e_{22}}+\ \ldots+x_{2n_2}\,\overrightarrow{e_{2n_2}}\right)+\cdots$$
$$+\left(x_{p1}\,\overrightarrow{e_{p1}}+x_{p2}\,\overrightarrow{e_{p2}}+\ \ldots+x_{pn_p}\,\overrightarrow{e_{pn_p}}\right)=\vec{0}$$

Alors, chaque vecteur défini par chaque parenthèse appartenant à un des sous espaces $\mathbb{V}_i$:

$$x_{11}\,\overrightarrow{e_{11}}+x_{12}\,\overrightarrow{e_{12}}+\ \ldots+x_{1n_1}\,\overrightarrow{e_{1n_1}}=x_{21}\,\overrightarrow{e_{21}}+x_{22}\,\overrightarrow{e_{22}}+\ \ldots+x_{2n_2}\,\overrightarrow{e_{2n_2}}=\cdots$$
$$=x_{p1}\,\overrightarrow{e_{p1}}+x_{p2}\,\overrightarrow{e_{p2}}+\ \ldots+x_{pn_p}\,\overrightarrow{e_{pn_p}}=\vec{0}$$

D'où :

$$x_{11}=x_{12}\ =\ \ldots x_{1n_1}\ =0$$

$$x_{21}=x_{22}\ =\ \ldots=x_{2n_2}\ =0$$

$$\vdots$$

$$x_{p1}=x_{p2}\ =\ \ldots=x_{pn_p}=0$$

La partie considérée est donc bien une base et :

$$\dim(\mathbb{V}_1)+\dim(\mathbb{V}_2)+\cdots+\dim\left(\mathbb{V}_p\right)=n_1+n_2+\cdots+n_p=\dim\left(\mathbb{V}_1\oplus\mathbb{V}_2\oplus\ldots\oplus\mathbb{V}_p\right)$$

Voyons maintenant le cas particulier d'une somme de deux sous espaces.

Considérons une base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ de $\mathbb{V}_1\cap\mathbb{V}_2$. En tant que partie libre de $\mathbb{V}_1$, elle peut être complétée en une base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{f_1},\ \overrightarrow{f_2},\ldots,\overrightarrow{f_m}\right)$ de $\mathbb{V}_1$ et en tant que partie libre de $\mathbb{V}_2$, en une base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2},\ldots,\overrightarrow{g_p}\right)$ de $\mathbb{V}_1$.

Montrons alors que la famille $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{f_1},\ \overrightarrow{f_2},\ldots,\overrightarrow{f_m},\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2},\ldots,\overrightarrow{g_p}\right)$ est une base de $\mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2$

Voyons le caractère générateur en premier :

Soit $\vec{u}\ \in\ \mathbb{V}_1+\mathbb{V}_2$ alors :

$$\exists\ (\vec{v},\vec{w})\in\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2:\ \ \vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$$

Donc :

$$\exists\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{n+n+m+p} : \begin{cases} \vec{v} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} + z_1\,\overrightarrow{f_1} \dots + z_m\,\overrightarrow{f_m} \\ \vec{w} = y_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\,\overrightarrow{e_n} + t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots + t_p\,\overrightarrow{g_p} \end{cases}$$

Donc :

$$\vec{u} = (x_1 + y_1)\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + (x_n + y_n)\,\overrightarrow{e_n} + z_1\,\overrightarrow{f_1} \dots + z_m\,\overrightarrow{f_m} + t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots + t_p\,\overrightarrow{g_p}$$

La famille est donc bien génératrice

Voyons son caractère libre en partant d'une combinaison linéaire nulle :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} + z_1\,\overrightarrow{f_1} \dots + z_m\,\overrightarrow{f_m} + t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots + t_p\,\overrightarrow{g_p} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} + z_1\,\overrightarrow{f_1} \dots + z_m\,\overrightarrow{f_m} = -t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots - t_p\,\overrightarrow{g_p} \ \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$$

Donc :

$$\exists\ (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n : -t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots - t_p\,\overrightarrow{g_p} = k_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + k_n\,\overrightarrow{e_n}$$

Soit :

$$k_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + k_n\,\overrightarrow{e_n} + t_1\,\overrightarrow{g_1} \dots + t_p\,\overrightarrow{g_p} = \vec{0}$$

Le caractère libre conduit à :

$$k_1 = \cdots = k_n = t_1 = \cdots = t_p = 0$$

On en déduit :

$$x_1\,\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{e_n} + z_1\,\overrightarrow{f_1} \dots + z_m\,\overrightarrow{f_m} = \vec{0}$$

Le caractère libre conduit à nouveau à :

$$x_1 = \cdots = x_n = z_1 = \cdots = z_m = 0$$

La famille est donc bien libre, c'est donc une base de $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Ainsi :

$$\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = n + m + p = (n + m) + (n + p) - n$$

$$= \dim(\mathbb{V}_1) + \dim(\mathbb{V}_2) - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$$