# *Quantités négligeables-Equivalents pour les suites*

## I Approche

Considérons les deux suites $U$ et $V$ suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad U_n = n \ , \qquad V_n = n^2$$

Prenons une « grande » valeur de $n$, 1000 pour fixer les idées. Nous avons alors :

$$U_{1000} = 1\ 000$$

$$V_{1000} = 1\ 000\ \ 000$$

Si, comme on la fait couramment en Physique, on ne s'intéresse à des nombres qu'avec un nombre réduit de chiffres significatifs, trois par exemple, nous voyons que le chiffre de plus grand poids de $U_{1000}$ n'est pas dans les positions des trois premiers chiffres significatifs de $V_{1000}$. En physique, on traduit cela naturellement en disant que $U_{1000}$ est négligeable devant $V_{1000}$ et on écrit :

$$U_{1000} \ll V_{1000}$$

A noter que cela revient à écrire :

$$\frac{U_{1000}}{V_{1000}} \ll 1$$

Plus précisément, si on travaille avec trois chiffres significatifs :

$$\frac{U_{1000}}{V_{1000}} < 0{,}001$$

A noter que cela entraîne :

$$U_{1000} + V_{1000} \approx U_{1000}$$

Et de façon plus générale, pour $n \geq 1000$ :

$$\frac{U_n}{V_n} \ll 1$$

$$U_n + V_n \approx U_n$$

Ces deux relations vont être définies plus rigoureusement en Mathématiques en termes de quantité négligeable pour la première et d'équivalent pour la seconde.

## II Quantité négligeable

### 1) définition

**Etant données deux suites $U$ et $V$, on dit que $U$ est une quantité négligeable devant $V$ si il existe une suite $\mathcal{E}$ telle que :**

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n = V_n\, \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}_n = 0}$$

On écrit alors pour simplifier (prononcer $U_n$ est un petit O de $U_n$) :

$$\boxed{U_n = o(V_n)}$$

Remarque :

Si $V$ est une suite ne s'annulant pas alors :

$$\boxed{U_n = o(V_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0}$$

2) Exemples :

$$\frac{1}{n} = o(1)$$

$$1 = o(n)$$

$$n = o(n^2)$$

De façon plus générale :

$$\forall\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2: \;\; \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{o}\left(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

Plus :

$$\forall\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2: \; \mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Ln}(\boldsymbol{n})^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{o}\left(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

3) Propriétés :

Dans toute la suite, $U, V, W$ désignent trois suites réelles.

- **transitivité**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{U_n = o(V_n)} \\ \boldsymbol{V_n = o(W_n)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U_n = o(W_n)}$$

Preuve :

Si $U_n = o(V_n)$ et $V_n = o(W_n)$ alors on a :

$$U_n = V_n\, \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}_n = 0$$

$$V_n = W_n\, \mathcal{E}'_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}'_n = 0$$

Soit :

$$U_n = W_n\, \mathcal{E}'_n\, \mathcal{E}_n$$

Soit en posant :

$$\mathcal{E}''_n = \mathcal{E}'_n\, \mathcal{E}_n$$

$$U_n = W_n\, \mathcal{E}''_n \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}''_n = 0$$

Donc :

$$U_n = o(W_n)$$

- **Somme**

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{U_n = o(W_n)} \\ \boldsymbol{V_n = o(W_n)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U_n + V_n = o(W_n)}$$

Preuve :

Si $U_n = o(W)$ et $V_n = o(W_n)$ alors on a :

$$U_n = W_n\, \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n = 0$$

$$V_n = W_n\, \mathcal{E}'_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}'_n = 0$$

Soit :

$$U_n + V_n = W_n \,\left(\mathcal{E}_n + \mathcal{E}'_n\right)$$

Soit en posant :

$$\mathcal{E}''_n = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}'_n$$

$$U_n + V_n = W_n\, \mathcal{E}''_n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}''_n = 0$$

Donc :

$$U_n + V_n = o(W_n)$$

Exemple :

$$n + n^2 = o(n^3)$$

- **Produit par une suite bornée**

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{U_n = o(W_n)} \\ \boldsymbol{V_n\ bornée} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U_nV_n = o(W_n)}$$

Preuve :

Si $U_n = o(W_n)$ alors :

$$U_n = W_n\, \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n = 0$$

Soit :

$$U_n V_n = W_n \ \mathcal{E}_n V_n$$

Soit en posant :

$$\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n V_n$$

$$U_n V_n = W_n \ \mathcal{E}''_n$$

Or $V$ est bornée donc :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ |V_n| \ \leq M$$

Donc :

$$\left|\mathcal{E}'_n\right| = |\mathcal{E}_n|\,|V_n| \leq M\,|\mathcal{E}_n|$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} M\,|\mathcal{E}_n| = 0$$

D'après el théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{E}'_n = 0$$

Donc :

$$U_n V_n = o(W_n)$$

<u>Exemple</u> :

$$n\, sin(n) = o(n^2)$$

$$(-1)^n\, n^2 = o(n^3)$$

# III Equivalents

## 1) définition

**Etant données deux suites $U$ et $V$, on dit que $U$ est équivalente à $V$ si il existe une suite $W$ telle que :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n = V_n\, W_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n = 1$$

On écrit alors pour simplifier

$$U_n \sim V_n$$

Une définition équivalente est celle-ci :

$$U_n \sim V_n \Leftrightarrow\ \exists\, \mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ \forall\, n \in \mathbb{N} : U_n = V_n\,(1 + \mathcal{E}_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n = 0$$

Remarque :

Si $V$ est une suite ne s'annulant pas alors :

$$U_n \sim V_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

## 2) Exemples :

$$\frac{1}{n} + 1 \sim 1$$

$$n + 2 \sim n$$

$$n + n^2 \sim n^2$$

De façon plus générale :

$$\forall\, (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4:\ \ \alpha < \beta\ \Rightarrow a\, n^{\alpha} + b\, n^{\beta} \sim b\, n^{\beta}$$

En particulier,

**soit un polynôme de degré $m$ de la variable $n$ :**

$$\boldsymbol{P(n) = a_m\, n^m + \cdots + a_1\, n^1 + a_0}$$

**alors :**

$$\boldsymbol{P(n) \sim a_m\, n^m}$$

3) Poropriétés de relation d'équivalence

Dans toute la suite, $U, V, W$ désignent trois suites réelles.

- **Réflexivité**

$$\boldsymbol{U_n \sim U_n}$$

Preuve

$$U_n = U_n \times 1$$

- **symétrie**

$$\boldsymbol{U_n \sim V_n \Rightarrow V_n \sim U_n}$$

Preuve

Si $U_n \sim V_n$ alors on a :

$$U_n = V_n\, W_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n = 1$$

Donc $W$ est non nulle à partir d'un certain rang et on peut écrire à partir de ce rang :

$$V_n = U_n \times \frac{1}{W_n}$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{W_n} = 1$$

Donc :

$$V_n \sim U_n$$

- **transitivité**

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{U_n \sim V_n}\\ \boldsymbol{V_n \sim W_n}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U_n \sim W_n}$$

Preuve :

Sous les hypothèses précédentes on a

$$U_n = V_n\, S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

$$V_n = W_n\, T_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = 1$$

Soit :

$$U_n = W_n\, T_n\, S_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} T_n\, S_n = 1$$

Donc :

$$U_n \sim W_n$$

4) Autres propriétés

- **Addition à une quantité négligeable**

$$\boldsymbol{V_n = o(U_n) \Rightarrow U_n + V_n \sim U_n}$$

Preuve :

Si $V_n = o(U_n)$ alors on a :

$$V_n = U_n\, \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n = 0$$

Donc :

$$U_n + V_n = U_n + U_n\, \mathcal{E}_n = U_n\, (1 + \mathcal{E}_n)$$

D'où

$$U_n + V_n \sim U_n$$

- **Somme d'équivalents de mêmes ordres**

$$\forall\, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 : \left.\begin{matrix} \boldsymbol{U_n \sim a\, W_n} \\ \boldsymbol{V_n \sim b\, W_n} \\ \boldsymbol{a+b \neq 0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{U_n + V_n \sim (a+b)\, W_n}$$

Preuve :

Si $U_n \sim a\, W_n$ et $V_n \sim b\, W_n$ alors on a :

$$U_n = a\, W_n\, S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

$$V_n = b\, W_n\, T_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = 1$$

Donc si $a + b \neq 0$

$$U_n + V_n = W_n\, (a\ \ S_n + b\ \ T_n) = \ (a+b)\, W_n\ \ \left(\frac{a\ \ S_n + b\ \ T_n}{a+b}\right)$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a\ \ S_n + b\ \ T_n}{a+b} = 1$$

D'où :

$$U_n + V_n \sim (a+b)\, W_n$$

Exemple :

Soit à déterminer la limite de la suite définie par :

$$U_n = \sqrt{4\, n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 7}$$

On a :

$$4\, n^2 + n + 1 \sim 4\, n^2$$

Donc :

$$4\, n^2 + n + 1 = 4\, n^2\, S_n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

$$\sqrt{4\, n^2 + n + 1} = 2\, n\, \sqrt{S_n} \ \ et \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{S_n} = 1$$

D'où :

$$\sqrt{4\, n^2 + n + 1} \sim 2\, n$$

De même :

$$\sqrt{n^2+7} \sim n$$

On en déduit :

$$\sqrt{4\,n^2+n+1} - \sqrt{n^2+7} \sim (2\,n-n)$$

Donc

$$U_n \sim n$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

- **Composée avec une fonction aux propriétés particulières**

| |
|---|
| ***f* étant une fonction réelle de la variable réelle définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$** |
| $$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{U_n \sim V_n} \\ \boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x) = 1} \\ \boldsymbol{\forall\ (x,y) \in D^2 :\ f\ (x\ y) = f\ (x)\ f\ (y)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{f(U_n) \sim f(V_n)}$$ |

Preuve :

Se rendre au fichier sur les limites de fonctions réelles de la variable réelle pour voir la notion étendue de limite.

Si $U_n \sim V_n$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ alors **:**

$$U_n = V_n\, S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

Donc :

$$f(U_n) = f(V_n)\, f(S_n)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} f(S_n) = 1$$

Donc :

$$f(U_n) \sim f(V_n)$$

Exemples :

Les fonctions de la forme $f(x) = x^\alpha$ présentent les qualités requises, par exemple :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Ainsi :

$$\sqrt{n^2+7} \sim \sqrt{n^2} \sim n$$

$$\sqrt[3]{27\,n^3-5\,n+2} \sim \sqrt[3]{27} \sim 3\,n$$

$$(n^2+7)^7 \sim (n^2)^7 \sim n^{14}$$

- **Attention aux équivalents à zéro !!!**

$$\boldsymbol{U_n \sim 0 \Rightarrow \left(\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n = 0\right)}$$

Autrement dit :

**Si une suite est équivalente à la suite nulle, c'est qu'elle est nulle à partir d'un certain rang**

On ne devrait donc presque jamais rencontrer cette situation dans les cas pratiques. Si tel était le cas, c'est qu'on a appliqué une mauvaise règle.

## III Echelle de comparaison

Il est intéressant de classer des suites de référence selon la relation d'ordre définie par la notion de quantité négligeable.

Ainsi, pour $(a,b,c,p,q,r) \in ]0;+\infty[^6$ , on a :

**Si** $\boldsymbol{c < r}$ **ou** $(\boldsymbol{c = r,\ a < p})$ **ou** $(\boldsymbol{c = r,\ a = p\ ,\ b < q})$

$$\boldsymbol{n^a\,(Ln(n))^b\,e^{c\,n} = o(n^p\,(Ln(n))^q\,e^{r\,n}}$$

Ce qui permet de classer des suites de ce type, toute suite étant négligeable devant n'importe laquelle située à sa droit, en utilisant le sigle ≪ pour établir les comparaisons :

$$\frac{1}{n^3 Ln(n)} \ll \frac{1}{n^3 Ln(n)} \ll \frac{1}{n^3} \ll \frac{(Ln(n))^4}{n^3} \ll \frac{Ln'n)}{n} \ll 1 \ll n^3 \ll n^3 \ll n^3\,e^n \ll e^{3\,n}$$