Equations différentielles linéaires complexes homogènes à coefficients constants

I Généralités

Définition

Une équation différentielle linéaire complexe homogène d'ordre n à coefficients constants est une équation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0$$

où f est une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ jusqu'à l'ordre n et où $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

On note par une récurrence triviale que si f est solution alors f admet des dérivées à tout ordre sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout entier naturel k :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f^{(n+k)}(x) + a_{n-1} f^{(n+k-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(k+1)}(x) + a_0 f^{(k)}(x)) = 0$$

Une telle équation peut alors se reformuler ainsi : Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivables à tout ordre sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$D^n(f) + a_{n-1} D^{n-1}(f) + \cdots + a_1 D(f) + a_0 Id(f) = 0 \quad (1)$$

où D désigne l'opérateur dérivation, c'est-à-dire l'endomorphisme défini sur le $\mathbb{C}$ espace vectoriel $C_\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une dérivée à tout ordre sur $\mathbb{R}$, par

$$D(f) = f'$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k(f)$ désigne la dérivée $k - i$ème de f soit :

$$D^k(f) = D \circ D \circ D \dots . \circ D(f)$$

et où on pose :

$$D^0(f) = f = Id(f)$$

Id étant l'endomorphisme identité de $C_\infty(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions de l'équation différentielles (1) est le sous espace vectoriel de $C_\infty(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{S} = ker\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 Id\right)$$

Preuve :

Soit $(f, g, \lambda) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{C}$ alors :

$$D^n(f) + a_{n-1} D^{n-1}(f) + \cdots + a_1 D(f) + a_0 Id(f) = 0$$

$$D^n(g) + a_{n-1} D^{n-1}(g) + \cdots + a_1 D(g) + a_0 Id(g) = 0$$

Donc par combinaison :

$$\left(D^n(f) + \lambda D^n(g)\right) + a_{n-1} \left(D^{n-1}(f) + \lambda D^{n-1}(g)\right) \dots + a_1 \left(D(f) + \lambda D(g)\right) + a_0 Id(f) + \lambda Id(g) = 0$$

Soit

$$D^n(f+\lambda\, g)+a_{n-1}\,D^{n-1}(f+\lambda\, g)+\cdots+a_1\,D(f+\lambda\, g)+a_0\,Id(f+\lambda\, g)=0$$

D'où :

$$f+\lambda\, g\in\mathbb{S}$$

Remarque : une deuxième méthode plus rapide consiste à noter que le noyau d'une application linéaire est un sous espace vectoriel.

II Résolution des équations du premier ordre :

Théorème :

Soit , pour $\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}$, une équation linéaire du premier ordre donc de la forme :

$$\boldsymbol{D(f)-a\,Id(f)=0}$$

soit de façon équivalente :

$$\boldsymbol{(D-a\,Id)(f)=0}$$

Les solutions d'une telle équations sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boldsymbol{f(x)=C\,e^{a\,x}},\qquad \boldsymbol{C}\in\mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions est donc le sous espace vectoriel de $\boldsymbol{C}_\infty(\mathbb{R})$:

$$\boldsymbol{ker(D-a\,Id)=Vect[(x\to e^{a\,x})]}$$

Ce sous espace est de dimension 1. C'est donc une droite vectorielle.

Preuve :

Notons $\mathbb{S}$ le sous espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle.

Notons d'abord que pour toute constante $C\in\mathbb{C}$:

$$D(x\to C\,e^{a\,x})=(x\to a\,C\,e^{a\,x})$$

Donc :

$$(D-a\,Id)(x\to C\,e^{a\,x})=0$$

et :

$$(x\to C\,e^{a\,x})\in\mathbb{S}$$

Ainsi :

$$Vect[(x\to e^{a\,x})]\subset\mathbb{S}$$

Réciproquement, soit $f\in\mathbb{S}$.

Posons :

$$g=(x\to e^{-a\,x})\,f$$

Alors :

$$D(g) = (x \to -a\, e^{-a\,x})\, f + (x \to e^{-a\,x})\, D(f) = (x \to e^{-a\,x})\left(-a\ f + D(f)\right) = 0$$

Donc il existe $C \in \mathbb{C} : g = (x \to C)$

Et donc :

$$f = (x \to C\, e^{a\,x})$$

Donc :

$$Vect[(x \to e^{a\,x})] = \mathbb{S}$$

III Résolution d'équations différentielles d'ordre n de référence :

Théorème :

Soit, pour $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}$, une équation linéaire d'ordre $\boldsymbol{n}$ de la forme :

$$\boldsymbol{(D - a\, Id)^{n}(f)\ = 0}$$

Les solutions d'une telle équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = P_{n-1}(x)\, e^{a\,x}}$$

Où $\boldsymbol{P_{n-1}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à $\boldsymbol{n-1}$

L'ensemble des solutions est donc le sous espace vectoriel :

$$\boldsymbol{ker((D - a\, Id)^{n}) = Vect\left[(x \to e^{a\,x}), (x \to x\, e^{a\,x}), \dots, \left(x \to x^{n-1}\, e^{a\,x}\right)\right]}$$

Ce sous espace est de dimension $\boldsymbol{n}$

Preuve :

Par récurrence sur n.

Initialisation : Pour $n = 1$ la propriété a déjà été démontrée.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et notons $\mathbb{S}$ le sous espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle :

$$(D - a\, Id)^{n+1}(f)\ = 0$$

Alors pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $f \in Vect[(x \to e^{a\,x}), (x \to x\, e^{a\,x}), \dots, (x \to x^{n-1}\, e^{a\,x})]$:

$$(D - a\, Id)^{n+1}(f) = (D - a\, Id)\left((D - a\, Id)^{n}(f)\right) = (D - a\, Id)(0) = 0$$

De plus :

$$\begin{aligned}(D - a\, Id)^{n+1}(x \to x^{n}\, e^{a\,x}) &= (D - a\, Id)^{n}\ (D - a\, Id)\ (x \to x^{n}\, e^{a\,x}) \\ &= (D - a\, Id)^{n}\ \ (x \to (n\, x^{n-1} + a\, x^{n})\, e^{a\,x} - a\, x^{n}\, e^{a\,x}\ ) \\ &= (D - a\, Id)^{n}\ (n\, x^{n-1}\ \ e^{a\,x}) = 0\end{aligned}$$

Donc :

$$Vect[(x \to e^{a\,x}), (x \to x\, e^{a\,x}), \dots, (x \to x^{n}\, e^{a\,x})\ ] \subset \mathbb{S}$$

Réciproquement :

Soit $f \in \mathbb{S}$. Posons $g = (x \to e^{-a\,x})\, f = (x \to e^{-a\,x}\, f(x))$ alors :

$$D(g) = (x \to -a\, e^{-a\,x})\, f + (x \to e^{-a\,x})\, D(f) = (x \to e^{-a\,x})\, (D - a\, Id)(f)$$

$$D^2(g) = (x \to e^{-a\,x})\, (D - a\, Id)^2(f)$$

et par une récurrence évidente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$D^k(g) = (x \to e^{-a\,x})\, (D - a\, Id)^k(f)$$

En particulier :

$$D^{n+1}(g) = (x \to e^{-a\,x})\, (D - a\, Id)^{n+1}(f) = 0$$

Donc g est un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Ainsi :

$$f = (x \to P_n(x)\ \ e^{a\,x})$$

Et donc $f \in Vect[(x \to e^{a\,x}), (x \to x\, e^{a\,x}), \dots, (x \to x^n\, e^{a\,x})]$ d'où :

$$\mathbb{S} = Vect[(x \to e^{a\,x}), (x \to x\, e^{a\,x}), \dots, (x \to x^n\, e^{a\,x})]$$

Ce qui prouve l'hérédité.

<u>III Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients complexes d'ordre 2</u>

<u>Théorème-définition</u> :

Soit une équation linéaire d'ordre 2 de la forme :

$$\boldsymbol{(D^2 + a_1\, D + a_0\, Id)(f) = 0}$$

où $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$.

On appelle polynôme caractéristique, le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$\boldsymbol{P(X) = X^2 + a_1\, X + a_0}$$

<u>1er cas :</u> P admet deux racines complexes distinctes r_1, r_2, alors P se met sous une forme dite scindée :

$$\boldsymbol{P(X) = (X - r_1)\,(X - r_2)}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = A\, e^{r_1\, x} + B\, e^{r_2\, x}}$$

où $(A, B) \in \mathbb{C}^2$

L'ensemble des solutions est donc le sous espace vectoriel de $C_\infty(\mathbb{R})$ défini par la somme directe :

$$\boldsymbol{ker\big((D - r_1\, Id)(D - r_2\, Id)\big) = Vect[(x \to e^{r_1\, x})] \oplus Vect[(x \to e^{r_2\, x})]}$$

Ce sous espace est de dimension 2. C'est donc un plan vectoriel.

2ème cas : P admet une racine complexe double r, alors P se met sous une forme dite scindée :

$$\boldsymbol{P(X) = (X - r)^2}$$

Les solutions de l'équation différentielle alors sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = (A + B\,x)\,e^{r\,x}}$$

où $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{C}^2$

L'ensemble des solutions est donc le sous espace vectoriel de $\boldsymbol{C_\infty}(\mathbb{R})$ défini par la somme directe :

$$\boldsymbol{ker\big((D - r\,Id)^2\big) = Vect[(x \to e^{r\,x})] + Vect[(x \to x\,e^{r\,x})]}$$

Ce sous espace est de dimension 2. C'est donc un plan vectoriel.

Preuve :

<u>1er cas :</u>

Notons d'abord que :

$$D^2 + a_1\,D + a_0\,Id = (D - r_1\,Id)\,(D - r_2\,Id)$$

et notons :

$$\mathbb{S}_1 = Vect[(x \to e^{r_1\,x})\,], \qquad \mathbb{S}_2 = Vect[(x \to e^{r_2\,x})\,]$$

et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

Soit $f \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ alors il existe $(f_1, f_2) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ tel que : $f = f_1 + f_2$

Donc :

$$(D - r_1\,Id)\,(D - r_2\,Id)(f)$$
$$= (D - r_2\,Id)(D - r_1\,Id)(f_1) + (D - r_1\,Id)\,(D - r_2\,Id)(f_2) = 0$$

Donc :

$$f \in \mathbb{S}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathbb{S}$. Considérons les polynômes :

$$Q_1(X) = (X - r_2), \qquad Q_2(X) = (X - r_1)$$

D'après le théorème de Bezout, les polynômes Q_1, Q_2 étant premiers entre eux, il existe des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, U_1, U_2 tels que :

$$U_1(X)\,Q_1(X) + U_2(X)\,Q_2(X) = 1$$

Donc :

$$U_1(D)\,Q_1(D) + U_2(D)\,Q_2(D) = Id$$

D'où :

$$U_1(D)\,(D - r_2\,Id)(f) + U_2(D)\,(D - r_1\,Id)(f)) = f$$

Posons alors :

$$f_1 = U_1(D)\,(D - r_2\,Id)\,(f), \qquad f_2 = U_2(D)\,(D - r_1\,Id)(f))$$

Alors :

$$(D - r_1\, Id)(f_1) = U_1(D)(D - r_1\, Id)(D - r_2\, Id)\,(f_1) = 0$$
$$(D - r_2\, Id)(f_2) = U_2(D)(D - r_2\, Id)(D - r_1\, Id)\,(f_2) = 0$$

Donc :

$$f_1 \in \mathbb{S}_1, \qquad f_2 \in \mathbb{S}_2$$

D'où :

$$f \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

Ainsi :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

Montrons que la somme est directe :

Soit $f \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ alors :

$$(D - r_1\, Id)(f) = (D - r_2\, Id)(f) = 0$$

Donc :

$$r_1\, f = r_2\, f$$

D'où :

$$f = 0$$

Ce qui montre que la somme est directe.

2ème cas : Déjà traité précédemment

<u>IV Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients complexes d'ordre n</u>

<u>Théorème-définition</u> :

Soit une équation linéaire d'ordre n de la forme :

$$\left(D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \cdots + a_1\, D^1 + a_0\, Id\right)(f) = 0$$

où $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On appelle polynôme caractéristique, le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0$$

Notons $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les racines distinctes de P. Alors P se met sous une forme dite scindée :

$$P(X) = (X - r_1)^{n_1}\, (X - r_2)^{n_2} \ldots \left(X - r_p\right)^{n_p}$$

Les solutions de l'équation différentielle alors sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=1}^{p} P_{n_k-1}(x)\, e^{r_k\, x}}$$

où $\boldsymbol{P_{n_k-1}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à $\boldsymbol{n_k - 1}$

L'ensemble des solutions est donc le sous espace vectoriel de $\boldsymbol{C_\infty}(\mathbb{R})$ défini par la somme directe :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{p} Vect\big[(x \to e^{r_k\, x}), (x \to x\, e^{r_k\, x}), \dots, \left(x \to x^{n_k-1}\, e^{r_k\, x}\right) \big]}$$

Ce sous espace est de dimension $\boldsymbol{n}$

Preuve :

Notons d'abord que :

$$D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \cdots + a_1\, D^1 + a_0\, Id = (D - r_1\, Id)^{n_1}\, (D - r_2\, Id)^{n_2} \dots \left(D - r_p\, Id\right)^{n_p}$$

et notons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathbb{S}_k = Vect[(x \to e^{r_k\, x}), (x \to x\, e^{r_k\, x}), \dots, (x \to x^{n_k-1}\, e^{r_k\, x})]$$

et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

Soit $f \in \sum_{k=1}^{p} \mathbb{S}_k$ alors il existe $\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2 \times \dots \times \mathbb{S}_p$ tel que : $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_p$

Donc :

$$\begin{aligned}
&(D - r_1\, Id)^{n_1}\, (D - r_2\, Id)^{n_2} \dots \left(D - r_p\, Id\right)^{n_p}(f) \\
&= (D - r_2\, Id)^{n_2} \dots \left(D - r_p\, Id\right)^{n_p}\, (D - r_1\, Id)^{n_1}(f_1) \\
&+ (D - r_1\, Id)^{n_1} \dots \left(D - r_p\, Id\right)^{n_p}\, (D - r_2\, Id)^{n_2}(f_2) \\
&+ \dots \\
&+ (D - r_1\, Id)^{n_1} \dots \left(D - r_{p-1}\, Id\right)^{n_{p-1}}\, \left(D - r_p\, Id\right)^{n_p}\left(f_p\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$f \in \mathbb{S}$$

Réciproquement, soit $f \in \mathbb{S}$.

Définissons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - r_i)^{n_i}$$

D'après le théorème de Bezout, les polynômes $Q_1, Q_2 \dots, Q_p$ étant premiers dans leur ensemble, il existe des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, $U_1, U_2, \dots, U_p$ tels que :

$$U_1(X)\, Q_1(X) + U_2(X)\, Q_2(X) + \cdots + U_p(X)\, Q_p(X) = 1$$

Donc :

$$U_1(D)\ Q_1(D) + U_2(D)\ Q_2(D) + \cdots + U_p(D)\ Q_p(D) = Id$$

D'où :

$$U_1(D)\ Q_1(D)(f) + U_2(D)\ Q_2(D)(f) + \cdots + U_p(D)\ Q_p(D)(f) = f$$

Posons alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$f_k = U_k(D)\ Q_1(D)\ (f)$$

Alors :

$$(D - r_k\ Id)^{n_k}(f_k) = U_k(D)\ (D - r_1\ Id)^{n_1}\ (D - r_2\ Id)^{n_2} \dots \left(D - r_p\ Id\right)^{n_p}(f_k) = 0$$

Donc :

$$f_k \in \mathbb{S}_k$$

D'où :

$$f \in \sum_{k=1}^{p} \mathbb{S}_k$$

Ainsi :

$$\mathbb{S} = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{S}_k$$

Montrons que la somme est directe :

Soit $i \in [\![1, p]\!]$, $f \in \mathbb{S}_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \mathbb{S}_k$ alors :

$$U_1(D)\ Q_1(D)(f) + U_2(D)\ Q_2(D)(f) + \cdots + U_p(D)\ Q_p(D)(f) = f$$

Or si $j \neq i :\ f \in \mathbb{S}_i$ donc :

$$Q_j(D)(f) = \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{p} \left(D - r_q\ Id\right)^{n_q}\right)(f) = \left(\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j \\ q \neq i}}^{p} \left(D - r_q\ Id\right)^{n_q}\right)(D - r_i\ Id)^{n_q}(f) = 0$$

Donc :

$$U_i(D)\ Q_i(D)(f) = f$$

De plus : $f = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} f_k\,, f_k \in\ \mathbb{S}_k$ donc :

$$Q_1(D)(f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} Q_i(D)(f_k) = 0$$

D'où :

$$f = 0$$

Ce qui montre que la somme est directe.