Méthodes générales de résolution des équations différentielles

(Fichier en cours d'élaboration)

Quand on est en présence d'une équation différentielle, cela se passe comme dans une partie d'échecs. Il faut élaborer une stratégie qui dépend du type d'équation à laquelle on a affaire, mais, là encore, comme au jeu, si quelques coups généraux peuvent être définis (le coup du berger aux échecs par exemple) l'infini variété d'équations que l'on peut produire fait qu'il faudra envisager chaque fois a priori plusieurs techniques possibles, certaines étant plus élégantes que d'autres, voire, seules à permettre de trouver la solution. C'est l'objet de ce fichier que de présenter quelques unes de ces techniques les plus utilisées.

1) Techniques pour résoudre les équations différentielles du premier ordre

Il convient d'abord de dire ce que l'on entend par équation différentielle du premier ordre. C'est une équation de la forme :

$$\boxed{f(x, y, y') = 0}$$

où f est une fonction de trois variables.

Plusieurs sous-types peuvent être définis :

a) **Equations différentielles linéaires**:

$$\boxed{a(x)y' + b(x)\, y + c(x) = 0}$$

où a, b, c sont trois fonctions continues de la variable x

En divisant par $a(x)$ sur un intervalle où a ne s'annule pas, elles se ramènent à :

$$\boxed{y' = -\frac{b(x)}{a(x)}y - \frac{c(x)}{a(x)}}$$

forme traitée dans un autre fichier de ce site

b) Equations différentielles à variables séparables

$$\boxed{g(y)\, y' = h(x)}$$

Avec des précautions qui seront détaillées dans la résolution d'exemples, l'équation s'intègre sous forme :

$$G(y) = H(x) + cte$$

Toujours avec des précautions, cela conduira à une résolution du genre :

$$\boxed{y = G^{-1}(H(x) + cte)}$$

c) Autre type courant ne se ramenant pas aux précédents

$$y' + b(x)\, g(y) + c(x) = 0$$

On pourra pour ce type tenter un changement de variable (voir plus loin le principe dans le cas du second ordre)

2) Techniques pour résoudre les équations différentielles du second ordre

Il convient de dire ce que l'on entend par équation différentielle du second ordre. C'est une équation de la forme :

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

où f est une fonction de quatres variables.

Plusieurs sous-types peuvent être définis :

a) Equations différentielles linéaires:

$$a(x)y'' + b(x)\, y' + c(x)y + d(x) = 0$$

où a, b, c sont trois fonctions continues de la variable x

En divisant par $a(x)$ sur un intervalle où a ne s'annule pas, elles se ramènent à une forme dite normalisée :

$$y'' + \frac{b(x)}{a(x)}\, y' + \frac{c(x)}{a(x)} y = -\frac{d(x)}{a(x)}$$

forme traitée dans un autre fichier de ce site

b) Autre type courant ne se ramenant pas aux précédents

$$y'' + b(x)\, g(y') + c(x)\, h(y) + d(x) = 0$$

Ce type peut s'avérer ardu à résoudre, voire impossible de façon analytique. Il faudra alors recourir à des méthodes approchées.

Cependant, avant de rendre les armes face à une telle équation, on peut tenter un certain nombre de techniques comme :

***** Le changement de variable** :

On pose :

$$y = f(x, z)$$

Ainsi, dans un cas plus simple où on pose :

$$y = f(z)$$

On aura :

$$y' = f'(z)z'$$

$$y'' = f''(z)\, z' + 2\, f'(z)\, z' + \, z''$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient une nouvelle équation différentielle vérifiée par la nouvelle fonction z. Tout l'art est de choisir le bon changement de variable pour obtenir une nouvelle équation que l'on sait résoudre, comme du type linéaire par exemple. Il existe quelques grandes stratégie dans certains cas :

- Si par exemple dans $b(x), c(x), d(x)$ apparaissent un même facteur $e^{k\,x}$, il sera avantageux de poser :

  $$y = e^{k\,x}\, z$$

  Car cela fera disparaitre le facteur $e^{k\,x}$ et allègera considérablement le traitement

- Si $b(x), c(x), d(x)$ sont des puissances x on pourra tenter :

  $$y = x^{\alpha}\, z$$

Il est à notre sens regrettable que, dans la pratique scolaire, les changements de variable soient généralement donnés, ce qui prive l'étudiant de l'action intelligente qui consiste à trouver lui-même la bonne stratégie à adopter. C'est comme si, jouant aux échecs, on lui donnait à chaque coup la tactique à employer. Or en Mathématiques, comme dans les autres sciences d'ailleurs, et nous irons même plus loin, dans tous les processus vivants, il n'y a pas de réponses toutes faites aux problèmes posés mais de nouvelles stratégies à développer visant à s'adapter. En dehors de cette attitude, le savoir est mort, il n'est que pure imposture de l'esprit et ruine de l'âme

Plein d'autres changements pourront être envisagés comme :

$$y = Ln\,(z)\,, \qquad y = e^{k\,z}$$

et parfois il sera plus commode de poser le changement de variable dans l'autre sens c'est-à-dire $z = f(y)$ et dériver sous cette forme.

Seul une pratique de la chose finira par donner une intuition de ce qu'il est intéressant de faire avant de donner sa langue aux méthodes approchées, qui perdent de l'élégance par défaut d'expression analytique.

<u>* La recherche de solutions développables en série entière</u>** :

Cette technique concerne uniquement les équations du type :

$$\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0}$$

Où a, b, c sont des polynômes de la variable x réels ou complexes

On posera alors :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ x^n$$

Ainsi, avec des précautions de travail sur le disque de convergence (sur sa frontière notamment):

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n \, a_n \ x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \, a_{n+1} \ x^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n \, (n-1) \, a_n \ x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) \, (n+1) \, a_{n+2} \ x^n$$

On en déduira en remplaçant dans l'équation une relation de récurrence sur la suite des a_n et avec un peu de chance on pourra reconnaitre le développement en série entière d'une fonction analytique. Les sujets des concours ICSAP corrigés sur ce site en contiennent plein.

c) Types remarquables du second ordre se ramenant aux précédents

Equations de Bernoulli :

Equations de Ricatti :