Résolution approchée d'une équation différentielle : Méthode d'Euler

Nous allons illustrer la méthode de résolution approchée dite méthode d'Euler dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants pour laquelle nous savons obtenir une solution analytique.

Soit donc l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' = 2\,y + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dont la solution analytique s'obtient aisément :

$$\boxed{y(x) = 2\,e^{2\,x} - 1}$$

Voyons comment en obtenir une estimation approchée avec la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0,1]$.

<u>Principe de la méthode d'Euler</u> :

- On commence par définir une subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$ appelée encore **discrétisation**. L'intervalle de subdivision est appelé **pas**. Nous le noterons h. La sudivision est alors définie par :

$$x_0 = 0, x_1 = h, \dots x_{i+1} = x_i + h = i\,h, \dots, x_n = 1$$

- On estime la valeur $y'(x_i)$ par :

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

- On établit une relation de récurrence approchée sur la suite des $y(x_i)$ à partir de l'équation différentielle évaluée en x_i en procédant comme suit :

$$y'(x_i) = 2\,y(x_i) + 2$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx 2\,y(x_i) + 2$$

$$\boxed{\begin{cases} y(x_{i+1}) \approx (2\,h + 1)\,y(x_i) + 2\,h \\ y(x_0) = 1 \end{cases}}$$

- On estime alors de façon approchée la suite des $y(x_i)$ par la suite des y_i définie par la relation de récurrence :

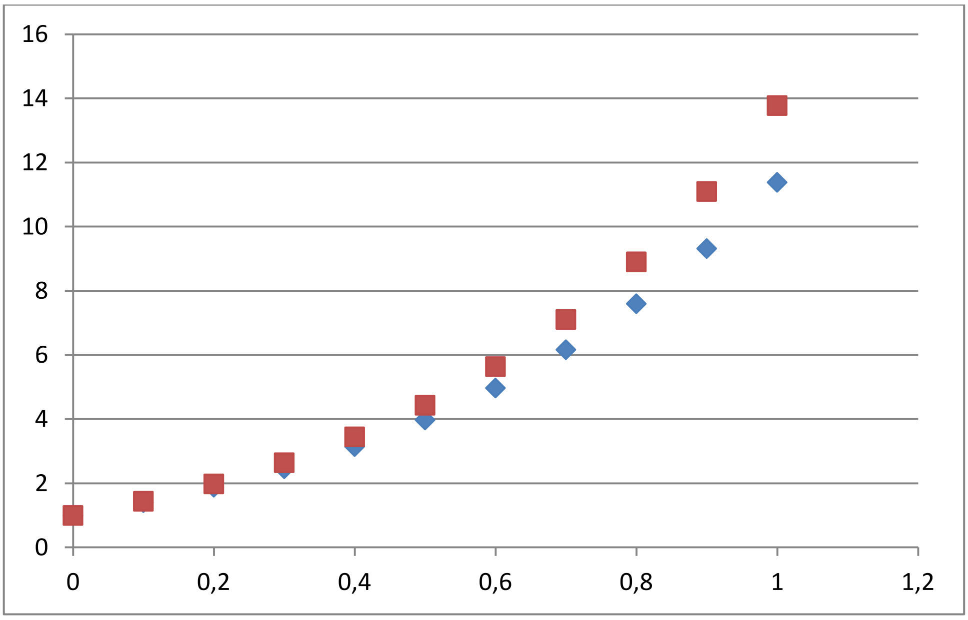
$$\boxed{\begin{cases} y_{i+1} \approx (2\,h + 1)\,y_i + 2\,h \\ y_0 = 1 \end{cases}}$$

Résultats de simulation

Nous avons utilisé un tableur pour effectuer les calculs avec trois pas différents, 0,1, 0,01 et 0,001. Les résultats sont présentés ci-dessous sous forme de tableaux et de graphiques faisant apparaitre les valeurs données par la méthode approchée et par la solution analytique qui est exacte.

1ère simulation : avec un pas de 0,1

pas = 0,1	solution approchée	solution exacte	erreur relative
0	1	1	0,0%
0,1	1,4	1,442805516	3,0%
0,2	1,88	1,983649395	5,2%
0,3	2,456	2,644237601	7,1%
0,4	3,1472	3,451081857	8,8%
0,5	3,97664	4,436563657	10,4%
0,6	4,971968	5,640233845	11,8%
0,7	6,1663616	7,110399934	13,3%
0,8	7,59963392	8,906064849	14,7%
0,9	9,3195607	11,09929493	16,0%
1	11,3834728	13,7781122	17,4%

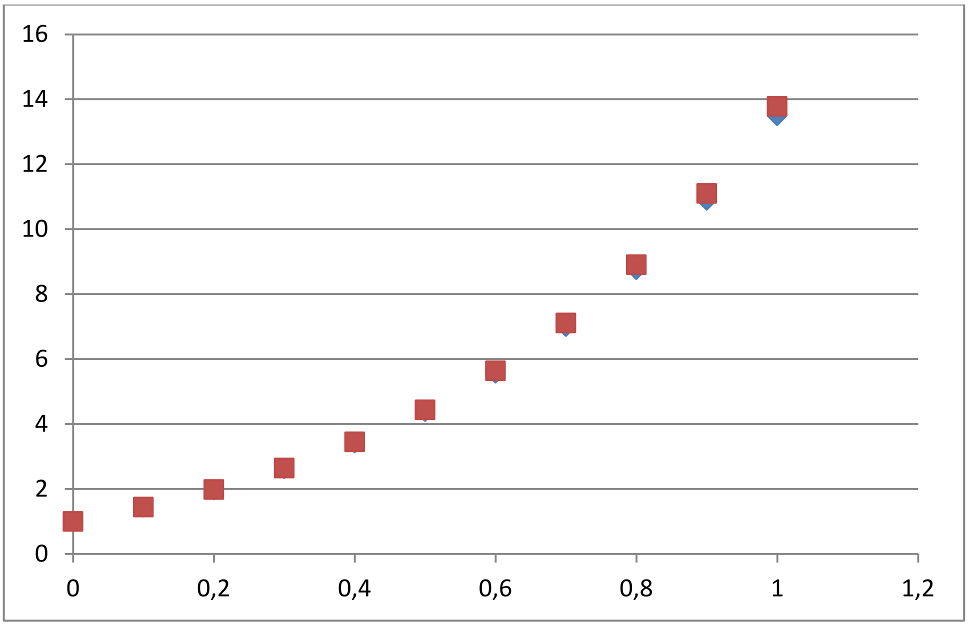


En bleu : solution exacte, en rouge : simulation

On observe une erreur relative croissante, avec un maximum de 17,4% ce qui est assez important. Il convient donc de raffiner la subdivision en choisissant un pas plus fin.

2ème simulation : avec un pas de 0,01

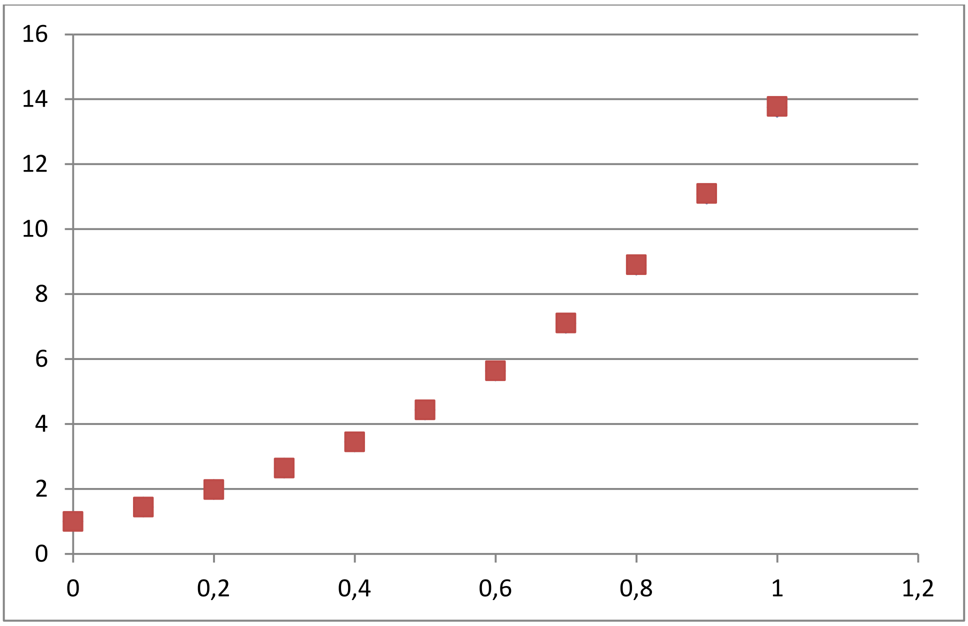
pas = 0,01	solution approchée	solution exacte	erreur relative
0	1	1	0,0%
0,1	1,43798884	1,442805516	0,3%
0,2	1,97189479	1,983649395	0,6%
0,3	2,62272317	2,644237601	0,8%
0,4	3,41607933	3,451081857	1,0%
0,5	4,38317606	4,436563657	1,2%
0,6	5,56206158	5,640233845	1,4%
0,7	6,99911645	7,110399934	1,6%
0,8	8,75087831	8,906064849	1,7%
0,9	10,8862663	11,09929493	1,9%
1	13,4892922	13,7781122	2,1%



On observe que l'erreur relative maximale n'est plus que de 2,1% ce qui commence à être satisfaisant. Si on veut encore améliorer les choses, il faut prendre un pas encore plus fin.

<u>3ème simulation : avec un pas de 0,001</u>

pas = 0,001	solution approchée	solution exacte	erreur relative
0	1	1	0,0%
0,1	1,44231765	1,442805516	0,0%
0,2	1,98245776	1,983649395	0,1%
0,3	2,64205462	2,644237601	0,1%
0,4	3,44752715	3,451081857	0,1%
0,5	4,43113704	4,436563657	0,1%
0,6	5,63228094	5,640233845	0,1%
0,7	7,09906841	7,110399934	0,2%
0,8	8,89024889	8,906064849	0,2%
0,9	11,0775647	11,09929493	0,2%
1	13,7486248	13,7781122	0,2%



Cette fois-ci, l'erreur relative maximale chute à 0,2 %. Le graphique ne permet d'ailleurs plus de distinguer les points de la solution approchée de ceux de la solution exacte. Le pas choisi sera alors pleinement satisfaisant.

A noter que pour une simulation sur un intervalle plus important comme par exemple $[0,10]$, ce pas ne serait plus satisfaisant car, comme l'observation le laisse à penser, l'erreur relative augmente avec l'abscisse x