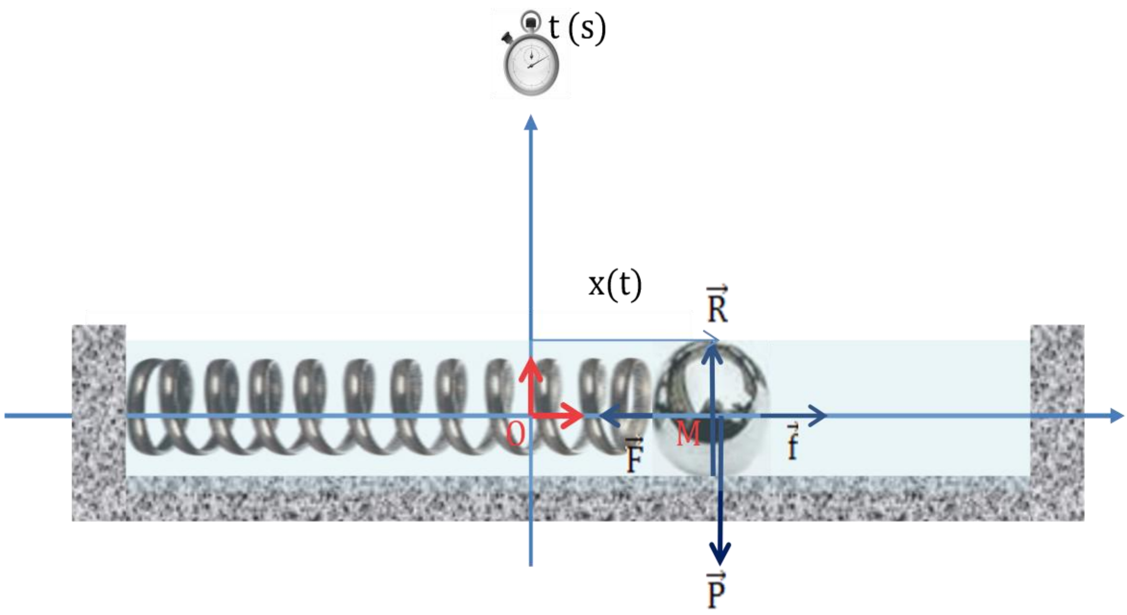
Equations différentielles du second ordre

Nous allons aborder dans ce fichier la notion d'équations différentielles du second ordre et montrer comment les résoudre dans les cas très particuliers mais combien utiles des équations différentielles linéaires.

I Un problème de physique

Prenons le problème des oscillations d'une masse accrochée à un ressort. Si on écarte de sa position d'équilibre, une bille de masse m par exemple, pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal dans un fluide (l'air ou l'eau par exemple), cette dernière va se mettre à osciller. Au cours de son mouvement, elle va être soumise à un ensemble de quatre forces :



<u>Son poids</u> (nous négligerons la poussée d'Archimède)

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

Une réaction de support normale au plan :

$$\vec{R}$$

Une force de frottement (dit visqueux) qui peut être prise de la forme :

$$\vec{f} = -K\,S\,\vec{v}$$

où S désigne la surface apparente du corps dans le sens de déplacement, K est un coefficient propre au fluide d'autant plus élevé que le fluide est dense ou visqueux et $\vec{v}$ le vecteur vitesse.

Une force de rappel du ressort de la forme :

$$\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$$

O désignant la position du centre de la boule dans sa position d'équilibre et M sa position à un instant t considéré.

L'application de la loi de Newton dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen conduit à l'équation :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\,\vec{a}}$$

$\vec{a}$ désignant le vecteur accélération instantanée.

Le mouvement du centre de la boule s'effectuant a priori sur une droite horizontale, l'équation peut être projetée dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan vertical contenant cette droite, l'origine des temps (t=0) étant prise au moment où on lâche le ressort écarté de sa position d'équilibre.

La cinématique (l'art de décrire le mouvement) peut être aussi définie dans ce repère par les trois vecteurs :

Le vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i}}$$

M désignant la position du centre de gravité de l'objet à un instant t et O sa position initiale.

Le vecteur vitesse, dérivé du premier :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}(t)\ \vec{i} = v(t)\ \vec{i}$$

Le vecteur accélération, dérivé du second :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(t)\ \vec{i} = a(t)\ \vec{i}$$

Et les forces :

$$\vec{P} = -\,m\,g\ \vec{j}$$

$$\vec{R} = R\,\vec{j}$$

$$\vec{f} = -K\,S\,v(t)\ \vec{i}$$

$$\vec{F} = \ -\,k\ \ x(t)\ \vec{i}$$

La seconde loi de Newton s'écrit donc ainsi :

$$\begin{cases} m\,a(t) = \ -K\,S\,v(t) - k\ \ x(t) \\ \qquad\quad 0 = -\,m\,g + R \end{cases}$$

La deuxième équation traduit que la réaction de support compense le poids à tout instant et la première s'écrit, après division par m :

$$\frac{dv}{dt}(t) = \ -\frac{K\,S}{m}\ v(t) - \frac{k}{m}\ x(t)$$

Soit en notant :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \ -\frac{K\,S}{m}\,\frac{dx}{dt}(t) - \frac{k}{m}\ x(t)$$

Posons également :

$$\alpha = \frac{K\,S}{m} \qquad \text{et} \quad \omega_0\ = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\alpha \frac{dx}{dt}(t) - {\omega_0}^2\, x(t)$$

Nous voyons donc que la composante x(t) du vecteur position sur $\vec{i}$ vérifie une équation où sa dérivée et sa dérivée seconde interviennent. Ce type d'équation est appelé **équation différentielle du second ordre**.

Nous allons vous montrer comment résoudre ce type d'équation dans des cas particuliers fréquemment rencontrés en physique, ou en chimie, et même en économie.

II Equations différentielles linéaires du second ordre

1) Définition

Nous adopterons pour variable t, afin de faire référence au temps de notre problème précédent et nous noterons dans le champ mathématique pure, la dérivée d'une fonction f(t) sous la forme $f'(t)$ et sa dérivée seconde sous la forme $f''(t)$ comme c'est souvent l'usage.

Une équation différentielle linéaire du second ordre est alors une équation de la forme :

$$f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t) + c(t)$$

Où a(t), b(t) et c(t) sont trois fonctions continues généralement données explicitement sur un intervalle I et f(t) la fonction deux fois dérivable sur I à déterminer.

Voici quelques exemples de telles équations différentielles :

$$f''(t) = t\, f'(t) + \cos(t)\, f(t) + \sin(t)$$

$$f''(t) = 5\, f'(t) + 3\, f(t) + 4$$

Il est également d'usage de présenter ce genre d'équation sous une autre forme regroupant tout ce qui concerne la fonction inconnue dans le membre de gauche :

$$f''(t) - a(t)\, f'(t) - \ b(t)\, f(t) = \ c(t)$$

Dans ce cas les fonctions – a(t) et $-$ b(t) sont appelées **coefficient** de l'équation différentielle et c(t) est appelée naturellement **second membre**.

Nous allons commencer par étudier les cas les plus simples, en commençant par celui où la fonction second membre est nulle :

$$f''(t) - a(t)\, f'(t) - \ b(t)\, f(t) = \ 0$$

Ce type d'équation est qualifié **d'équation homogène** car si f(t) est solution, le produit c f(t) de cette fonction par une constante quelconque est encore solution.

Notons également que si f(t) et g(t) sont deux fonctions solutions, leur somme f(t)+g(t) est encore solution.

Pour les deux raisons précédentes, on qualifie de **linéaire** le type d'équation précédente.

Voici, pour bien distinguer, un exemple d'équation différentielle non linéaire :

$$f''(t) = \sqrt{f(t)}$$

2) Equations différentielles linéaires homogènes à coefficient constant

Nous allons résoudre notre équation différentielle linéaire homogène mais dans un cas simple, celui où la fonction a(t) est une constante k et la fonction b(t) nulle :

$$\boxed{f''(t) = k\, f(t)}$$

Notez bien la démarche très simple.

D'abord, il suffit de constater que nous connaissons une classe de fonctions solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme :

$$f(t) = e^{\sqrt{k}\,t} \quad \text{ou } f(t) = e^{-\sqrt{k}\,t} \quad \text{si} \quad k > 0$$

et :

$$f(t) = \cos\left(\sqrt{-k}\,t\right) \ \text{ ou } \ f(t) = \sin\left(\sqrt{-k}\,t\right) \quad \text{si} \quad k < 0$$

Plus généralement en multipliant ces deux fonctions par des constantes arbitraires et en les additionnant nous avons encore des solutions :

$$f(t) = A\, e^{\sqrt{k}\,t} + B\, e^{-\sqrt{k}\,t} \quad \text{si} \ \ k > 0$$

$$f(t) = A \cos\left(\sqrt{-k}\,t\right) + B \sin\left(\sqrt{-k}\,t\right) \quad \text{si} \ \ k < 0$$

Une question se pose alors naturellement. Y a-t-il d'autres solutions ? La réponse va être donnée par la démarche suivante, qui est un raisonnement par équivalence (voir le fichier sur le langage mathématique au sujet des types de raisonnement).

Traitons d'abord le cas où $k > 0$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = A\, e^{\sqrt{k}\,t} + B\, e^{-\sqrt{k}\,t}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(t) = A\, e^{\sqrt{k}\, t} + B\, e^{-\sqrt{k}\, t} \\ f'(t) = A\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}\, t} - B\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}\, t} \end{cases}$$

A ce stade nous résolvons le système comme un système à deux inconnues A et B. Notons qu'il équivaut à celui-ci :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \sqrt{k}\, f(t) = A\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}\, t} + B\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}\, t} \\ f'(t) = A\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}\, t} - B\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}\, t} \end{cases}$$

(soit par addition et soustraction membre à membre)

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \sqrt{k}\, f(t) - f'(t) = 2\, B\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}\, t} \\ f'(t) + \sqrt{k}\, f(t) = 2\, A\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}\, t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \left(\sqrt{k}\, f(t) - f'(t)\right) e^{\sqrt{k}\, t} = 2\, B\sqrt{k} \\ \left(f'(t) + \sqrt{k}\, f(t)\right) e^{-\sqrt{k}\, t} = 2\, A\sqrt{k} \end{cases}$$

A ce stade, nous appliquons le fait qu'une fonction dérivable est constante sur un intervalle I équivaut à ce que sa dérivée soit identiquement nulle sur I. Ce qui donne le système équivalent :

$$\begin{cases} \left(\left(\sqrt{k}\, f(t) - f'(t)\right) e^{\sqrt{k}\, t}\right)' = 0 \\ \left(\left(f'(t) + \sqrt{k}\, f(t)\right) e^{-\sqrt{k}\, t}\right)' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{k}\, f'(t) - f''(t)\right) e^{\sqrt{k}\, t} + \left(\sqrt{k}\, f(t) - f'(t)\right)\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}\, t} = 0 \\ \left(f''(t) + \sqrt{k}\, f'(t)\right) e^{-\sqrt{k}\, t} - \left(f'(t) + \sqrt{k}\, f(t)\right)\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}\, t} = 0 \end{cases}$$

(soit en divisant par le facteur exponentiel)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f''(t) + k\, f(t) = 0 \\ f''(t) - k\, f(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f''(t) = k\, f(t)$$

CQFD

Voyons maintenant le cas où $k < 0$ mais posons pour plus de clarté :

$$\boxed{\sqrt{-k} = \omega \quad \text{soit} \quad k = -\,\omega^2}$$

Nous avons alors l'équivalence :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = A\cos\left(\sqrt{-k}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{-k}\, t\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(t) = A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t) \\ f'(t) = -\,A\,\omega\sin(\omega\, t) + B\,\omega\cos(\omega\, t) \end{cases}$$

Nous sommes en présence d'un système qui peut être résolu sur A et B prises comme inconnues. Procédons alors en calculant son déterminant qui vaut :

$$\cos(\omega\, t)\omega\cos(\omega\, t) + \ \sin(\omega\, t)\omega\sin(\omega\, t) = \omega$$

Ce déterminant n'étant pas nul, le système équivaut, par combinaison, au système suivant :

$$\forall\, t \ \in \mathbb{R} \begin{cases} \omega\cos(\omega\, t)\, f(t) - \sin(\omega\, t)\, f'(t) = A\,\omega\left(\cos^2(\omega\, t) + \sin^2(\omega\, t)\right) \\ \omega\sin(\omega\, t)\, f(t) + \cos(\omega\, t)\, f'(t) = B\,\omega\left(\sin^2(\omega\, t) + \cos^2(\omega\, t)\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \ \in \mathbb{R} \begin{cases} \omega\cos(\omega\, t)\, f(t) - \sin(\omega\, t)\, f'(t) = A\,\omega \\ \omega\sin(\omega\, t)\, f(t) + \cos(\omega\, t)\, f'(t) = B\,\omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\omega\cos(\omega\, t)\, f(t) - \sin(\omega\, t)\, f'(t)\right)' = 0 \\ \left(\omega\sin(\omega\, t)\, f(t) + \cos(\omega\, t)\, f'(t)\right)' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\,\omega^2\sin(\omega\, t)\, f(t) + \omega\cos(\omega\, t)\, f'(t) - \omega\cos(\omega\, t)\, f'(t) - \sin(\omega\, t)\, f''(t) = 0 \\ \omega^2\cos(\omega\, t)\, f(t) + \omega\sin(\omega\, t)\, f'(t) - \omega\sin(\omega\, t)\, f'(t) + \cos(\omega\, t)\, f''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\omega\, t)\left(-\,\omega^2\ f(t) - f''(t)\right) = 0 \\ \cos(\omega\, t)\left(\omega^2\ f(t) + f''(t)\right) = 0 \end{cases}$$

(soit, compte tenu du fait que cos et sin ne peuvent s'annuler en même temps)

$$\Leftrightarrow\ f''(t) = \ -\,\omega^2\ f(t)$$

$$\Leftrightarrow\ f''(t) = \ k\ f(t)$$

CQFD

Ce raisonnement montre à l'évidence que l'équation différentielle $f''(t) = k\,f(t)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont les fonctions $f(t) = A\,e^{\sqrt{k}\,t} + B\,e^{-\sqrt{k}\,t}$ si k>0 et $f(t) = A\cos(\sqrt{-k}\,t) + B\sin(\sqrt{-k}\,t)$ si k<0, avec A et B constantes réelles quelconques.

Voyons alors si notre démarche fonctionne encore lorsque les fonctions coefficients a(t) et b(t) sont toutes deux constantes et non nulles. L'équation se met alors sous la forme :

$$\boxed{f''(t) = a\,f'(t) + b\,f(t)}$$

a et b étant deux constantes réelles.

Nous allons alors tenter d'appliquer la même recette en cherchant des solutions exponentielles tout d'abord, c'est-à-dire de la forme $f(t) = e^{k\,t}$, k étant un nombre réel à déterminer. En remplaçant dans l'équation, nous avons :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\; f''(t) = a\,f'(t) + b\,f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : k^2\,e^{k\,t} = a\,k\,e^{k\,t} + b\,e^{k\,t}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : k^2 = a\,k + b$$

Les solutions de la forme $f(t) = e^{k\,t}$ sont donc celles pour lesquelles k est solution d'une équation du second degré appelée **équation caractéristique** :

$$\boxed{k^2 - a\,k - b = 0}$$

Supposons alors dans un premier cas que le discriminant Δ de cette équation soit strictement positif. Il y a alors deux racines distinctes réelles k_1 et k_2 qui vérifient entre autres :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = a \\ k_1 k_2 = -b \end{cases}$$

Notons alors par linéarité qu'il existe une famille de solutions formée par les fonctions de la forme :

$$f(t) = A\,e^{k_1\,t} + B\,e^{k_2\,t}$$

Vérifions, par un raisonnement par équivalence, que ce sont les seules.

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ f(t) = A\, e^{k_1 t} + B\, e^{k_2 t}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} f(t) = A\, e^{k_1 t} + B\, e^{k_2 t} \\ f'(t) = A\, k_1\, e^{k_1 t} + B\, k_2\, e^{k_2 t} \end{cases}$$

Là encore, nous pouvons résoudre ce système par combinaison en A et B en multipliant la première par k_1 et en la soustrayant à la seconde, puis en faisant une démarche analogue par multiplication par k_2. Le système équivaut alors au suivant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} f'(t) - k_1 f(t) = B\,(\,k_2 - k_1)\, e^{k_2 t} \\ f'(t) - k_2 f(t) = A\,(\,k_1 - k_2)\, e^{k_1 t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} \big(f'(t) - k_1 f(t)\big)\, e^{-k_2 t} = B\,(\,k_2 - k_1) \\ \big(f'(t) - k_2 f(t)\big)\, e^{-k_1 t} = A\,(\,k_1 - k_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} \Big(\big(f'(t) - k_1 f(t)\big)\, e^{-k_2 t}\Big)' = 0 \\ \Big(\big(f'(t) - k_2 f(t)\big)\, e^{-k_1 t}\Big)' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} \big(f''(t) - k_1 f'(t)\big)\, e^{-k_2 t} - \big(f'(t) - k_1 f(t)\big)\, k_2 e^{-k_2 t} = 0 \\ \big(f''(t) - k_2 f'(t)\big)\, e^{-k_1 t} - \big(f'(t) - k_2 f(t)\big)\, k_1 e^{-k_1 t} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} f''(t) - k_1 f'(t) - k_2\big(f'(t) - k_1 f(t)\big) = 0 \\ f''(t) - k_2 f'(t) - k_1\big(f'(t) - k_2 f(t)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ \begin{cases} f''(t) - (k_1 + k_2)\, f'(t) + k_1 k_2 f(t) = 0 \\ f''(t) - (k_1 + k_2)\, f'(t) + k_1 k_2 f(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}:\ f''(t) = (k_1 + k_2)\, f'(t) - k_1 k_2 f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}:\ f''(t) = a\, f'(t) + b\, f(t)$$

CQFD

3) Equations différentielles homogènes quelconques

Voyons maintenant le cas où les fonctions coefficients a(t) et b(t) sont continues sur un intervalle I mais quelconque. Le problème est rappelons le : Trouver f dérivable sur I telle que :

$$\forall\, t \in I : \quad f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t)$$

Dans les cas particuliers traités précédemment, nous avons vu que la connaissance d'un couple de solutions particulières de cette équation avait conduit à trouver toutes ses solutions. C'est ce que nous allons exploiter ici en supposant que $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux solutions de notre équation. Reprenons alors le raisonnement précédent :

$$\forall\, t \in I : \; f(t) = A\, f_1(t) + B\, f_2(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in I : \begin{cases} f(t) = A\, f_1(t) + B\, f_2(t) \\ f'(t) = A\, f_1{}'(t) + B\, f_2{}'(t) \end{cases}$$

Calculons alors le déterminant W(t) de ce système, par rapport aux inconnues A et B (il est appelé **wronskien**) :

$$\boxed{W(t) = f_1(t)\; f_2{}'(t) - f_1{}'(t)\, f_2(t)}$$

L'objectif étant de résoudre le système en A et B, il serait intéressant que son déterminant ne s'annule jamais quelque soit t. Etudions le pour cela comme une fonction, puisqu'il est dérivable sur I :

$$W'(t) =$$

$$f_1{}'(t)\; f_2{}'(t) + f_1(t)\; f_2{}''(t) - f_1{}''(t)\, f_2(t) - f_1{}'(t)\; f_2{}'(t)$$

$$= f_1(t)\; f_2{}''(t) - f_1{}''(t)\, f_2(t)$$

$$= f_1(t)\; \Big(a(t)\, f_2{}'(t) + b(t)\, f_2(t)\Big) - \Big(a(t)\, f_1{}'(t) + b(t)\, f_1(t)\Big)\; f_2(t)$$

$$= a(t)\; \Big(f_1(t)\, f_2{}'(t) - f_1{}'(t)\, f_2(t)\Big)$$

$$= a(t)\, W(t)$$

Autrement dit, le déterminant vérifie une équation différentielle du premier ordre :

$$\boxed{W'(t) = a(t)\,W(t)}$$

En notant A(t) une primitive de a(t), W(t) est donc de la forme :

$$\boxed{W(t) = c\,e^{A(t)} \quad \text{avec c constante réelle}}$$

Notons alors que W(t) est identiquement nul dans la situation suivante que nous qualifierons de **proportionnalité** des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ (le terme plus exact serait **colinéarité**, une fonction étant assimilable à un vecteur) :

$$\forall\, t \in I : f_1(t) = k\,f_2(t) \quad \text{ou } \forall\, t \in I : \; f_2(t) = k\,f_1(t)$$

Réciproquement, si le wronskien de deux solutions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est nul sur I, la deuxième solution n'étant pas identiquement nulle sur I, alors par continuité de $f_2(t)$, il existe au moins un intervalle J inclus dans I sur lequel $f_2(t)$ nr s'annule pas

Nous pouvons alors faire apparaître la dérivée d'un quotient car nous avons :

$$\forall\, t \in J : \; \frac{f_1(t)\,f_2{}'(t) - \; f_1{}'(t)\,f_2(t)}{f_2(t)^2} = 0$$

Soit :

$$\forall\, t \in J : \; \left(\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right)' = 0$$

Finalement, il existe une constante c telle que :

$$\forall\, t \in J : \; \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = c$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, t \in J : \; f_1(t) = c\,f_2(t)}$$

Les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont donc proportionnelles sur J. Nous pourrions alors montrer qu'elles sont proportionnelles sur I par un résultat puissant appelé théorème de Cauchy-Lipschitz traitant de l'existence et de l'unicité de solutions mais nous ne le ferons pas, pour ne pas éreinter le lecteur débutant. Nous nous contenterons de ce résultat facilement accessible et qui sera largement suffisant pour nombre d'applications (il est présenté sous forme contraposée :

Si deux solutions $\mathbf{f_1(t)}$ et $\mathbf{f_2(t)}$ d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre $\mathbf{f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t)}$, avec $\mathbf{a(t)}$ et $\mathbf{b(t)}$ continues sur un intervalle I, ne sont proportionnelles sur aucun sous intervalle [a ;b] non réduit à un point, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{t} \in \mathbf{I} :\; \mathbf{f(t) = A\, f_1(t) + B\, f_2(t)}}$$

A et B étant deux constantes réelles arbitraires.

$f_1(t)$ et $f_2(t)$, assimilables à des vecteurs, forment alors une **base de solutions** et on dit que l'ensemble des solutions est un **espace vectoriel de dimension deux.**

Terminons alors le traitement des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants lorsque le déterminant de l'équation caractéristique est négatif ou nul en commençant par le cas strictement négatif.

Rappelons les données, l'équation d'abord :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\; f''(t) = a\, f'(t) + b\, f(t) \quad \text{où a et b sont deux réels constants}$$

Et l'équation caractéristique

$$k^2 - a\,k - b = 0$$

Si le discriminant Δ de cette équation est strictement négatif, il y a deux racines complexes k_1 et k_2, qui sont conjuguées et peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\boxed{k_1 = -\alpha + i\,\omega \quad ; k_2 = -\alpha - i\,\omega \qquad \text{avec } \alpha \text{ et } \omega \text{ réels}}$$

Convenons alors de noter :

$$\boxed{e^{k_1 t} = e^{(-\alpha + i\,\omega)\,t} = e^{-\alpha\,t}\,e^{i\,\omega\,t} = e^{-\alpha\,t}(\cos(\omega\,t) + i\sin(\omega\,t))}$$

Donnant ainsi un sens à l'exponentielle d'un nombre complexe.

Dérivons alors cette relation, en définissant ainsi, la dérivée d'une fonction complexe :

$$\boxed{(f(t) + i\,g(t))' = f'(t) + i\,g'(t)}$$

Autrement dit en dérivant partie réelle et partie imaginaire.

Il vient alors :

$$\left(e^{k_1 t}\right)' = (e^{-\alpha\,t}\cos(\omega\,t))' + i\,(e^{-\alpha\,t}\sin(\omega\,t))' =$$

$$(-\alpha\,e^{-\alpha\,t}\cos(\omega\,t) - \omega\,e^{-\alpha\,t}\sin(\omega\,t)) + i\,(-\alpha\,e^{-\alpha\,t}\sin(\omega\,t) + \omega\,e^{-\alpha\,t}\cos(\omega\,t))$$

$$= e^{-\alpha\,t}\,(-\alpha + i\,\omega)\,(\cos(\omega\,t) + i\,\sin(\omega\,t))$$

Nous avons donc le résultat remarquable :

$$\boxed{\left(e^{k_1 t}\right)' = k_1\,e^{k_1 t}}$$

Ainsi, les fonctions $e^{k_1 t}$ et $e^{k_2 t}$ sont solutions de la même équation différentielle, mais posée pour des fonctions f(t) complexes, et appelée **équation complexe associée**.

L'astuce consiste alors à changer de couples de solutions en notant que les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ définies ci après, sont encore solutions de l'équation complexe associée :

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{e^{k_1 t} + e^{k_2 t}}{2} = e^{-\alpha\,t}\cos(\omega\,t) \\ f_2(t) &= \frac{e^{k_1 t} - e^{k_2 t}}{2\,i} = e^{-\alpha\,t}\sin(\omega\,t) \end{aligned}}$$

L'avantage, c'est que ce sont des fonctions à valeurs réelles. Elles sont donc aussi solutions de l'équation réelle de départ.

Or de toute évidence, il n'existe pas d'intervalle [a ; b] non réduit à un point sur lequel ces fonctions sont proportionnelles sinon on aurait sur un tel intervalle sur lequel $\sin(\omega\, t)$ ne s'annule pas :

$$e^{-\alpha\, t} \cos(\omega\, t) = c\; e^{-\alpha\, t} \sin(\omega\, t)$$

Soit

$$\cos(\omega\, t) = c\; \sin(\omega\, t)$$

Ce qui est notoirement absurde

Notons qu'il est aussi possible de calculer directement le wronskien de ces solutions, pour vérifier qu'il ne s'annule pas, mais c'est plus long !

Je vous le fais quand même, pour la beauté de l'art !

$$W(t) = f_1(t)\, f_2{}'(t) - f_1{}'(t)\, f_2(t)$$

$$= e^{-\alpha\, t} \cos(\omega\, t)\, (-\alpha\, e^{-\alpha\, t} \sin(\omega\, t) + \omega\, e^{-\alpha\, t} \cos(\omega\, t))$$
$$- e^{-\alpha\, t} \sin(\omega\, t)\, (-\alpha\, e^{-\alpha\, t} \cos(\omega\, t) - \omega\, e^{-\alpha\, t} \sin(\omega\, t))$$

$$= \omega\, e^{-2\alpha\, t}\, (\cos^2(\omega\, t) + \sin^2(\omega\, t))$$

$$= \omega\, e^{-2\alpha\, t} \neq 0$$

Voilà, pour satisfaire les plus incrédules d'entre vous, encore que les mathématiques ne soient pas une question de foi mais de raison, même si je pense que les mathématiques recèlent les clés du merveilleux ordonnancement de notre monde, mais çà c'est peut être une question de foi et à l'heure où de nombreux enseignants la perdent, il serait peut être bon de la réhabiliter.

4) Equations différentielles avec second membre

Voyons maintenant la résolution des équations les plus générales, c'est-à-dire avec un second membre :

$$\forall\, t \in I :\; f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t) + c(t)$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière $f_P(t)$ et nous verrons des moyens pour en trouver dans de nombreuses situations, alors nous avons :

$$\forall\, t \in I :\ f_P''(t) = a(t)\, f_P'(t) + b(t)\, f_P(t) +\ c(t)$$

Notre première équation est alors équivalente, par soustraction membre à membre à :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I\ \ :\ f''(t) -\ & f_P''(t)\\ &= a(t)\, f'(t) + b(t)f(t) + c(t) - a(t)\, f_P'(t) - b(t)\, f_P(t) - c(t)\end{aligned}$$

Soit encore :

$$\boxed{\forall\, t \in I\ \ :\ \big(f_P(t) -\ f_P(t)\big)'' = a(t)\, \big(f(t) -\ f_P(t)\big)' + b(t)\big(f(t) -\ f_P(t)\big)}$$

Si nous notons alors $g(t)$ la fonction $f(t) -\ f_P(t)$ cette dernière vérifie :

$$\forall\, t \in I :\ \ g''(t) = a(t)\, g'(t) + b(t)\, g(t)$$

Autrement dit, une équation différentielle linéaire homogène, dont les solutions sont les fonctions définies par une base $g_1(t)$et $g_2(t)$ de solutions (nous admettrons qu'il en existe toujours une en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, mais nous avons montré dans le cas où $a(t)$ et $b(t)$ sont constantes comment en obtenir une) sous la forme :

$$\forall\, t \in I :\ g(t) = A\, g_1(t) + B\, g_2(t)$$

Nous en déduisons aisément les solutions de notre équation différentielle initiale :

$$\boxed{\forall\, t \in I :\ f(t) = f_P(t) + A\, g_1(t) + B\, g_2(t)}$$

Nous pouvons ainsi résumer l'affaire :

Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de la forme $\mathbf{f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t) + \ c(t)}$ avec a(t), b(t) et c(t) continues sur un même intervalle I, sont les fonctions qui sont la somme d'une solution particulière de cette équation et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée $\mathbf{f''(t) = a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t)}$.

Et voilà , rendez vous dans des applications en physique de premier intérêt !

III Résolution du problème de la chute des corps dans un fluide

Reprenons ainsi notre problème initial des oscillations d'une masse posée sur un plan vertical et accrochée à un ressort, cette masse étant plongée dans un fluide visqueux.

Rappelons l'équation sur la position de la masse x(t) :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \ -\alpha\ \frac{dx}{dt}(t) - {\omega_0}^2\ x(t)}$$

L'équation homogène associée est :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \ -\alpha\ \frac{dx}{dt}(t) - {\omega_0}^2\ x(t)$$

L'équation caractéristique est :

$$\boxed{k^2 + \alpha\, k + {\omega_0}^2 = 0}$$

Son discriminant est :

$$\Delta = \alpha^2 - 4\ {\omega_0}^2$$

Le type de solutions, réelles ou complexes, dépend a priori du signe de Δ mais si la résistance du fluide à l'avancement de la masse n'est pas trop importante, alors nous aurons :

$$\alpha \ll 2\omega_0 \quad \text{et} \quad \Delta \approx -4\,\omega_0{}^2 < 0$$

donc deux racines complexes conjuguées :

$$k_1 = -\,\alpha - i\,\omega_0 \quad \text{et} \quad k_2 = -\,\alpha + i\,\omega_0$$

La solution générale de l'équation qui est homogène, est alors :

$$x(t) = A\,e^{-\alpha\,t}\cos(\omega_0\,t) + B\,e^{-\alpha\,t}\sin(\omega_0\,t)$$

Reste à déterminer A et B à partir des conditions initiales, soit, pour une masse écartée à l'abscisse x_0 et lâchée à t= 0 sans vitesse initiale:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

Dérivons pour cela x(t) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) = -\alpha\,e^{-\alpha\,t}\,(A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)) \\ + e^{-\alpha\,t}\,(-\,A\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t)) \end{aligned}$$

$$= e^{-\alpha\,t}\left((B\,\omega_0 - A\,\alpha)\,\cos(\omega_0\,t) - (A\,\omega_0 + B\,\alpha)\,\sin(\omega_0\,t)\right)$$

Les conditions initiales donnent donc les relations :

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B\,\omega_0 - A\,\alpha = 0 \end{cases}$$

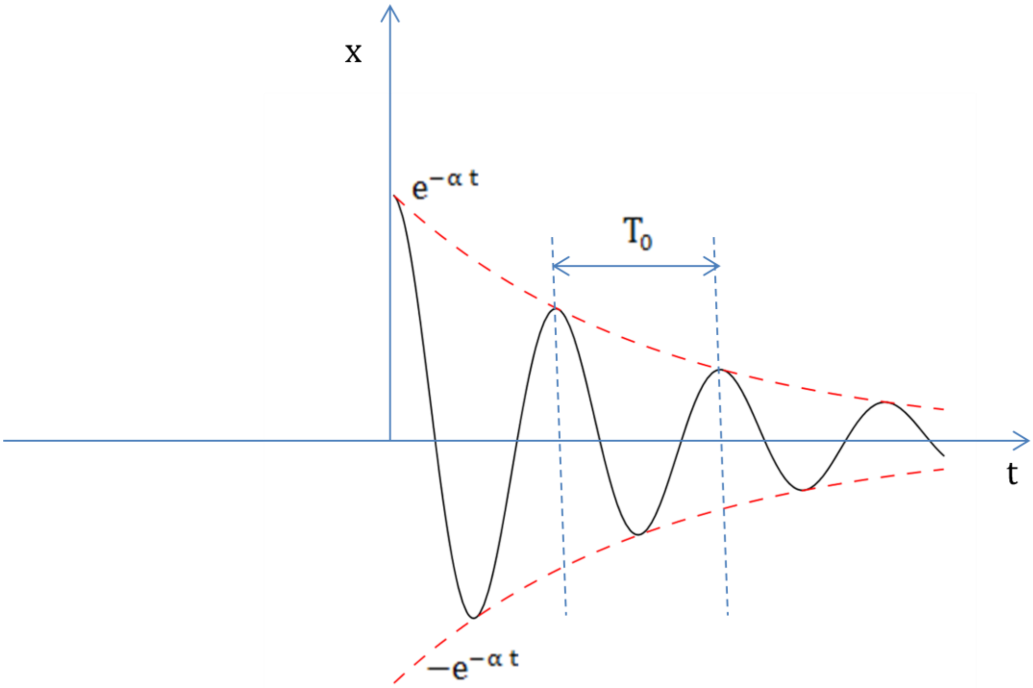
Soit :

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \dfrac{A\,\alpha}{\omega_0} \ll A \end{cases}$$

Nous en déduisons la position x(t) :

$$\boxed{x(t) = x_0\,e^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega_0\,t)}$$

L'allure de la courbe correspondante est alors la suivante :



Il s'agit d'un mouvement oscillatoire amorti de pseudo période :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}}$$

Si t_n et t_{n+1} désignent les instant à deux pics consécutifs correspondants donc à une valeur de cosinus égale à 1, nous avons :

$$\frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = \frac{x_0\ e^{-\alpha\, t_n}}{x_0\ e^{-\alpha\, t_{n+1}}} = e^{\alpha\,(t_{n+1} - t_n)}$$

Soit :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})}\right) = \alpha\,(t_{n+1} - t_n)$$

finalement :

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{Ln}\big(x(t_n)\big) - \mathrm{Ln}\big(x(t_{n+1})\big)}{t_{n+1} - t_n}}$$

Autrement dit, α est **le taux de décroissance du logarithme de l'amplitude de déplacement** à chaque pic.