Equations différentielles du premier ordre

Nous allons aborder dans ce fichier la notion d'équations différentielles et montrer comment les résoudre dans les cas très particuliers mais combien utiles des équations différentielles linéaires du premier ordre. Un autre fichier sera consacré au second ordre.

I Un problème de physique

Reprenons le problème de la chute d'un corps (voir le magazine Forces et chute des corps de la série Sciences et Rigolade) . Si on lâche un objet de masse m dans un fluide (l'air ou l'eau par exemple) sans vitesse initiale, ce dernier va être soumis à un ensemble de trois forces :

Son poids :

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

La poussée d'Archimède :

$$\vec{\pi} = -\,m_f\,\vec{g}$$

où m_f désigne la masse de fluide déplacée

Une force de frottement (dit visqueux) qui peut être prise de la forme :

$$\vec{f} = -K\,S\,\vec{v}$$

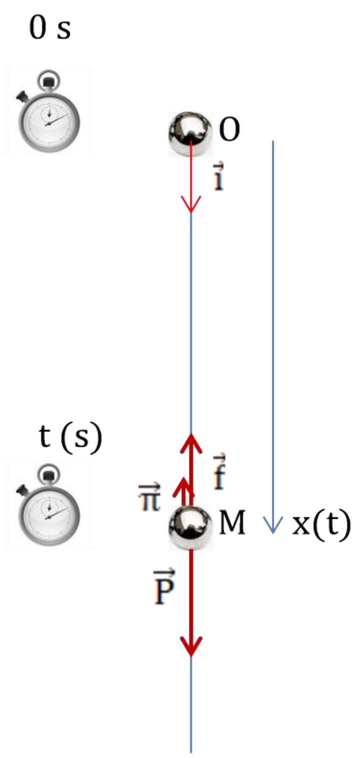
où S désigne la surface apparente du corps dans le sens de déplacement et K est un coefficient propre au fluide d'autant plus élevé que le fluide est dense ou visqueux.

L'application de la loi de Newton dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen conduit à l'équation :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}}$$

$\vec{a}$ désignant le vecteur accélération instantanée.

Le mouvement s'effectuant a priori sur une droite verticale, l'équation peut être projetée dans un repère $(O, \vec{i})$ lié à cette droite.



La cinématique (l'art de décrire le mouvement) peut être ainsi définie dans ce repère par les trois vecteurs :

<u>Le vecteur position</u> :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i}$$

M désignant la position du centre de gravité de l'objet à un instant t et O sa position initiale.

<u>Le vecteur vitesse</u>, dérivé du premier :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}(t)\ \vec{i} = v(t)\ \vec{i}$$

<u>Le vecteur accélération</u>, dérivé du second :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(t)\ \vec{i} = a(t)\ \vec{i}$$

Et les forces :

$$\vec{P} = m\, g\, \vec{i}$$

$$\vec{\pi} = -\, m_f\, g\, \vec{i}$$

$$\vec{f} = -K\, S\, v(t)\, \vec{i}$$

La seconde loi de Newton s'écrit donc ainsi :

$$m\, a(t) = -K\, S\, v(t) + m\, g - m_f\, g$$

soit, en fonction de la seule vitesse et après division par m:

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\frac{K\, S}{m}\, v(t) + g\left(1 - \frac{m_f}{m}\right)$$

Nous voyons que cette équation fait apparaître la densité de l'objet par rapport au fluide, qui est, rappelons-le :

$$d = \frac{\text{masse de l'objet}}{\text{masse de fluide déplacé}} = \frac{m}{m_f}$$

Posons également :

$$\alpha = \frac{K\, S}{m}$$

L'équation s'écrit :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\alpha\, v(t) + g\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Dans le cas où l'objet est très dense par rapport au fluide dans lequel il se déplace (cas d'une bille d'acier lâchée dans l'air), le terme 1/d peut être négligé devant 1 et l'équation approximée sous la forme :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\alpha\, v(t) + g$$

Nous voyons donc que la composante v(t) du vecteur vitesse sur $\vec{i}$ vérifie une équation où sa dérivée intervient. Ce type d'équation est appelé **équation différentielle du premier ordre**.

Nous allons vous montrer comment résoudre ce type d'équation dans des cas particuliers fréquemment rencontrés en physique, ou en chimie, et même en économie, bref dans tous les champs où les mathématiques s'immiscent, et il y en a peu où elle ne le fait pas. Voyons cela.

II Equations différentielles linéaires du premier ordre

1) Définition

Nous adopterons pour variable t, afin de faire référence au temps de notre problème précédent et nous noterons dans le champ mathématique pure, la dérivée d'une fonction f(t) sous la forme $f'(t)$ comme c'est souvent l'usage.

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est alors une équation de la forme :

$$\boxed{f'(t) = a(t)\, f(t) + b(t)}$$

Où a(t) et b(t) sont deux fonctions continues généralement données explicitement sur un intervalle I et f(t) la fonction dérivable sur I à déterminer.

Voici quelques exemples de telles équations différentielles :

$$f'(t) = t\, f(t) + \sin(t)$$

$$f'(t) = 5\, f(t) + 3$$

Il est également d'usage de présenter ce genre d'équation sous une autre forme regroupant tout ce qui concerne la fonction inconnue dans le membre de gauche :

$$\boxed{f'(t) - a(t)\, f(t) = b(t)}$$

Dans ce cas la fonction – a(t) est appelée **coefficient** de l'équation différentielle et b(t) est appelée naturellement **second membre**.

Nous allons commencer par étudier les cas les plus simples, en commençant par celui où la fonction second membre est nulle :

$$\boxed{f'(t) = a(t)\, f(t)}$$

Ce type d'équation est qualifié **d'équation homogène** car si f(t) est solution, le produit c f(t) de cette fonction par une constante quelconque est encore solution.

Notons également que si f(t) et g(t) sont deux fonctions solutions, leur somme f(t)+g(t) est encore solution.

Pour les deux raisons précédentes, on qualifie de **linéaire** le type d'équation précédente.

Voici, pour bien distinguer, un exemple d'équation différentielle non linéaire :

$$\boxed{\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = \sqrt{\mathrm{f}(\mathrm{t})}}$$

2) Equations différentielles linéaires homogènes à coefficient constant

Nous allons résoudre notre équation différentielle linéaire homogène mais dans un cas simple, celui où la fonction a(t) est une constante k :

$$\boxed{\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = \mathrm{k}\,\mathrm{f}(\mathrm{t})}$$

Notez bien la démarche très simple, car nous la réemploierons pour résoudre les équations différentielles du second ordre :

D'abord, il suffit de constater que nous connaissons une classe de fonctions solutions de l'équation différentielle sur ℝ. Ce sont les fonctions de la forme :

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{k}\,\mathrm{t}}$$

Plus généralement en multipliant par une constante c quelconque, nous avons encore des solutions :

$$\boxed{\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{k}\,\mathrm{t}}}$$

Une question se pose alors naturellement. Y a-t-il d'autres solutions ? La réponse va être donnée par la démarche suivante, qui est un raisonnement par équivalence (voir le fichier sur le langage mathématique au sujet des types de raisonnement).

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ f(t) = c\, e^{k\,t}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ f(t)e^{-k\,t} = c$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ \left(f(t)e^{-k\,t}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t)\, e^{-k\,t} + f(t)\left(-k\, e^{-k\,t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ \left(f'(t) - k\, f(t)\right) e^{-k\,t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t) - k\, f(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t) = k\, f(t)$$

CQFD

Ce raisonnement montre à l'évidence que l'équation différentielle $f'(t) = k\, f(t)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont les fonctions $f(t) = c\, e^{k\,t}$ où c est une constante réelle quelconque (on dit arbitraire en maths).

Vous avez noté que le raisonnement par équivalence permet de partir de la conclusion à laquelle on veut aboutir pour pouvoir la prouver et il n'y a aucune faute de logique dans ce procédé, ça fait partie de l'art mathématique. Nous réutiliserons ce procédé pour les équations du second ordre.

3) <u>Equations différentielles homogènes quelconques</u>

Voyons maintenant le cas où la fonction coefficient a(t) est continue sur un intervalle I mais quelconque. Le problème est rappelons le : Trouver f dérivable sur I telle que :

$$\forall\, t \in I : \quad f'(t) = a(t)\, f(t)$$

Nous allons nous inspirer de ce qui a été fait précédemment, mais en partant de la fin :

$$\forall\, t \in I : \quad f'(t) = a(t)f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t) - a(t)f(t) = 0$$

Là ça bloque ! Non, pas vraiment, car ça fait penser à une formule de dérivée d'un produit. Introduisons pour cela une **primitive** de a(t) c'est-à-dire une fonction A(t) telle que :

$$\forall\, t \in I : \quad A'(t) = a(t)$$

Notre problème devient :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t) - A'(t)f(t) = 0$$

Oui, c'est bien, mais c'est pas encore tout à fait une formule du type :

$$u'\, v + u\, v'$$

Il manque v. Mais en multipliant par $e^{-A(t)}$ ça change tout !!!

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ f'(t)\, e^{-A(t)} - A'(t)\, e^{-A(t)} f(t) = 0$$

Et cette équation reste bien équivalente à la précédente car une exponentielle n'est jamais nulle. Or nous reconnaissons la dérivée d'une différence. Nous avons donc l'équation équivalente suivante :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} : \ \left(f(t)\, e^{-A(t)}\right)' = 0}$$

Qui équivaut à son tour à :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ f(t)\, e^{-A(t)} = c$$

c étant une constante réelle quelconque.

Finalement :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} : \ f(t) = c\ e^{A(t)}}$$

Eh bien voilà, du grand art les maths ! Non ?

Résumons :

Si $a(t)$ est une fonction continue de la variable t sur un intervalle I alors les solutions de l'équation différentielle du premier ordre $f'(t) = a(t)f(t)$ sont les fonctions de la forme $f(t) = c\ e^{A(t)}$ où c est une constante réelle quelconque et $A(t)$ une primitive de $a(t)$ sur I

Voyons quelques exemples :

Exemple 1 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ f'(t) = \sin(t)\, f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} :\ f(t) = c\ e^{-\cos(t)}$$

Pour que la valeur de c soit fixée, il faut se donner une condition, généralement la valeur de $f(0)$, appelée alors condition initiale.

Ainsi dans l'exemple si $f(0) = 1$ nous avons :

$$c\ e^{-\cos(0)} = 1$$

$$c\ e^{-1} = 1$$

$$c = e$$

et il y a alors une unique solution :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ f(t) = e\ e^{-\cos(t)} = e^{1-\cos(t)}$$

Exemple 2 :

$$\forall\, t \in]0; +\infty[\ :\ f'(t) = \frac{1}{t^2} f(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in]0; +\infty[\ :\ f(t) = c\ e^{-\frac{1}{t}}$$

Dans ce cas, il n'y a pas de solutions sur $\mathbb{R}$ mais des solutions sur $]0; +\infty[$ et des solutions sur $]-\infty; 0[$.

4) Equations différentielles avec second membre

Voyons maintenant la résolution des équations les plus générales, c'est-à-dire avec un second membre :

$$\boxed{\forall\, t \in I \ : \ f'(t) = a(t)\, f(t) + b(t)}$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière $f_P(t)$ et nous verrons des moyens pour en trouver dans de nombreuses situations, alors nous avons :

$$\forall\, t \in I \ : \ f_P{}'(t) = a(t)\, f_P(t) + b(t)$$

Notre première équation est alors équivalente, par soustraction membre à membre à :

$$\forall\, t \in I \ : \ f'(t) - f_P{}'(t) = a(t)\, f(t) + b(t) - a(t)\, f_P(t) - b(t)$$

Soit encore :

$$\boxed{\forall\, t \in I \ : \ \big(f(t) - f_P(t)\big)' = a(t)\,\big(f(t) - f_P(t)\big)}$$

Si nous notons alors $g(t)$ la fonction $f(t) - f_P(t)$ cette dernière vérifie :

$$\forall\, t \in I : \ g'(t) = a(t)\, g(t)$$

Autrement dit une équation différentielle linéaire homogène dont les solutions sont les fonctions définies par :

$$\forall\, t \in I : \ g(t) = c\ e^{A(t)}$$

Nous en déduisons aisément les solutions de notre équation différentielle initiale :

$$\boxed{\forall\, t \in I : \ f(t) = f_P(t) + c\ e^{A(t)}}$$

Nous pouvons ainsi résumer l'affaire :

Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $\mathbf{f'(t) = a(t)\,f(t) + b(t)}$ avec a(t) et b(t) continues sur un même intervalle I sont les fonctions qui sont la somme d'une solution particulière de cette équation et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée $\mathbf{f'(t) = a(t)\,f(t)}$.

Voilà c'est dit et cela va nous rendre de grands services, notamment en physique.

III Résolution du problème de la chute des corps dans un fluide

Voyons l'application concrète des belles mathématiques que nous venons de développer. Précisons humblement que nous n'en sommes pas l'auteur. Il faut remercier nos illustres et moins illustres ancêtres (au hasard, merci au très illustre Newton)

Rappelons l'équation sur la vitesse de chute v(t) :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}(t) = -\alpha\, v(t) + g\left(1 - \frac{1}{d}\right)}$$

L'équation homogène associée est :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\alpha\, v(t)$$

Ses solutions sont les fonctions :

$$v(t) = A\, e^{-\alpha\, t}$$

où A est une constante réelle (oui je l'ai notée A cette constante car c est réservé en physique à la vitesse de la lumière , Na !)

Une solution particulière de l'équation initiale s'obtient facilement en cherchant une solution constante $v(t) = B$:

$$0 = -\alpha\, B + g\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Soit :

$$B = \frac{g}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Il en découle les solutions de l’équation initiale :

$$v(t) = A\ e^{-\alpha\, t} + B$$

Or, si l’objet a été lâché sans vitesse initiale, nous avons une condition :

$$\boxed{v(0) = 0}$$

En la reportant dans l’équation donnant les solutions, cela donne :

$$0 = A\ e^{-\alpha \times 0} + B$$

Soit :

$$A = -B$$

D’où il découle :

$$v(t) = -B\ e^{-\alpha\, t} + B = B\,(1 - e^{-\alpha\, t})$$

Nous notons alors que la vitesse v(t) tend vers une valeur limite qui est B et que nous noterons v_∞ lorsque le temps tend vers l’infini soit, en résumé :

$$\boxed{v(t) = v_\infty\,(1 - e^{-\alpha\, t}) \quad \text{avec} \ \ v_\infty = \frac{g}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{d}\right) \ \ \text{et} \quad \alpha = \frac{K\,S}{m}}$$

Notons qu’en début de chute, nous avons, sachant $e^{-\alpha\, t} \approx 1 - \alpha\, t$:

$$v(t) \approx v_\infty \alpha\, t = g\left(1 - \frac{1}{d}\right) t$$

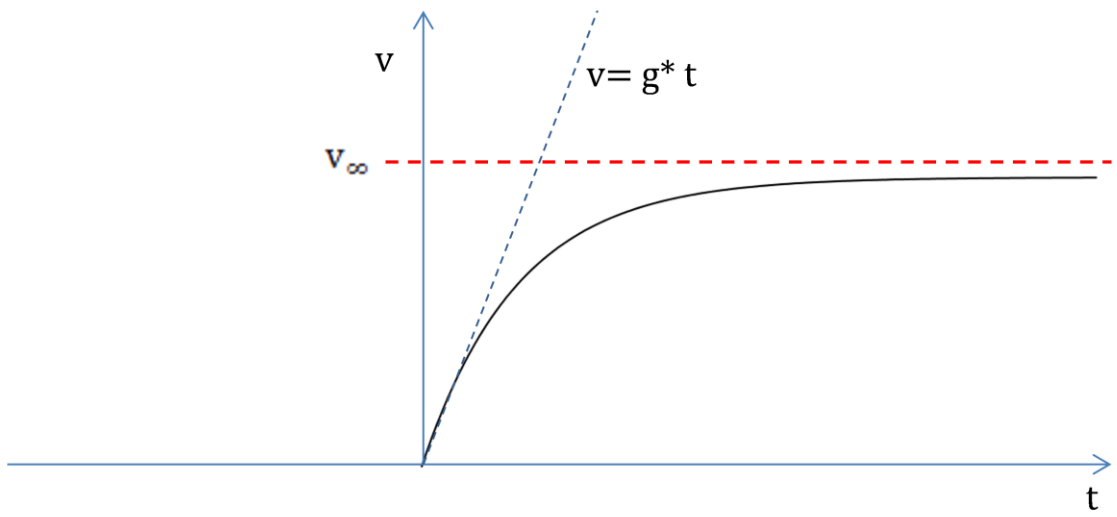
Si nous notons :

$$g^* = g\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

ce qui est le champ gravitationnel apparent, compte tenu de la poussée d'Archimède, nous avons une formule simple bien connue :

$$v(t) \approx g^* t$$

Voyons ce que cela donne en représentation graphique :



Que faire avec ça me direz vous ? Eh bien, on peut imaginer une expérience, où on lâcherait un objet pas trop dense dans l'air pour qu'il atteigne sa vitesse limite sur une dizaine de mètre et par chronophotographie, mesurer cette vitesse limite. Cela permettrait d'en déduire la valeur de K dans le modèle de frottement visqueux que nous avons pris.

Remarquons que le modèle de frottement visqueux n'est pas forcément parfaitement adapté. Ainsi pour des véhicules se déplaçant dans l'air, la force de résistance de ce dernier a une intensité de la forme :

$$f = \frac{1}{2}\ \rho_{air}\ S\ C_x\ v^2$$

où $\rho_{air} = 1{,}2\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ est la masse volumique de l'air (pris à 20°C), C_x est le **coefficient de traînée**, dépendant de la forme du véhicule, S une grandeur appelée **maître couple** en rapport avec sa surface apparente dans la direction du déplacement et v sa vitesse (voir le wiki sur le sujet, je ne suis pas un perroquet !)

Nous avons alors une proportionnalité de la force de frottement au carré de la vitesse et non plus à la vitesse, ce qui rend pour une chute, l'équation différentielle sur la vitesse plus compliquée à résoudre car elle n'est plus linéaire.

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\frac{\rho_{air}\ S\ C_x}{2\ m}\ v^2(t) + \ g\left(1 - \frac{m_f}{m}\right)$$

La résolution peut se faire malgré tout, par une technique moins élégante, mais ce n'est pas notre propos ici.