Endomorphisme cyclique, une approche matricielle.

Une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est dite cyclique si il existe une colonne X_0 de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ telle que la famille $\left(X_0, A\,X_0, A^2\,X_0, \dots, A^{n-1}\,X_0\right)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Un endomorphisme cyclique d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est un endomorphisme pour lequel il existe une base dans lequel sa matrice est cyclique.

On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme canonique f de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui à toute colonne X associe la colonne $Y = A\,X$ et que si on désigne par $x_1, x_2, \dots, x_n$ les éléments de la colonne X et par $A_1, A_2, \dots, A_n$ les colonnes de la matrice A alors Y est une combinaison linéaire des colonnes de A avec comme coefficients les éléments de X, c'est-à-dire :

$$Y = x_1 A_1 + x_2\,A_2 + \cdots + x_n A_n$$

On rappelle également que si $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont les colonnes d'une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$A\,B = A\,(B_1|B_2|\dots|B_n) = (A\,B_1|A\,B_2|\dots|A\,B_n)$$

1) <u>Matrice compagnon</u>

Formons la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ dans la base $(X_0, A\,X_0, A^2\,X_0, \dots, A^{n-1}\,X_0)$ dont les colonnes sont formées par les colonnes de cette base et notons la :

$$P = (X_0 \mid A\,X_0 \mid A^2 X_0 \mid \dots \mid A^{n-1}\,X_0)$$

Alors P est inversible et :

$$A\,P = (A\,X_0 \mid A^2\,X_0 \mid A^3 X_0 \mid \dots \mid A^n X_0)$$

Décomposons $A^n X_0$ sur la base $(X_0, A\,X_0, A^2\,X_0, \dots, A^{n-1}\,X_0)$:

$$A^n X_0 = a_0\,X_0 + a_1\,A\,X_0 + a_2\,A^2\,X_0 + \cdots + a_{n-1}\,A^{n-1}\,X_0$$

On a alors :

$$A\,P = P\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice qui apparait est appelée matrice de type compagnon.

Une matrice est donc cyclique si et seulement si elle est semblable à une matrice de type compagnon

2) <u>Polynôme minimal d'une matrice cyclique</u>

Notons que l'on a :

$$A^n X_0 - a_{n-1}\, A^{n-1}\, X_0 - \cdots a_2\, A^2\, X_0 - a_1\, A\, X_0 - a_0\, X_0 = 0$$

Soit :

$$(A^n - a_{n-1}\, A^{n-1}\, - \cdots a_2\, A^2\, - a_1\, A\, - a_0\, I_n)\, X_0 = 0$$

où 0 est la colonne ayant ses n termes nuls.

Ainsi, le polynôme $P(X) = X^n - a_{n-1}\, X^{n-1}\, - \cdots a_2\, X^2\, - a_1\, X\, - a_0$ est un polynôme annulateur de A en X_0. Montrons alors qu'il est annulateur de A en tous les autres vecteurs-colonne de la base $(X_0, A\, X_0, A^2\, X_0, \dots, A^{n-1}\, X_0\,)$ en notant que tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A^n - a_{n-1}\, A^{n-1}\, - \cdots a_2\, A^2\, - a_1\, A\, - a_0\, I_n)\, A^k\, X_0$$

$$= A^k\, (A^n - a_{n-1}\, A^{n-1}\, - \cdots a_2\, A^2\, - a_1\, A\, - a_0\, I_n)\, X_0 = 0_n$$

Ainsi :

$$(A^n - a_{n-1}\, A^{n-1}\, - \cdots a_2\, A^2\, - a_1\, A\, - a_0\, I_n)\, P = 0$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{A^n - a_{n-1}\, A^{n-1}\, - \cdots a_2\, A^2\, - a_1\, A\, - a_0\, I_n = 0_n}}$$

où 0_n est la matrice carrée d'ordre n ayant tous ses termes nuls.

Le polynôme $P(X)$ est donc annulateur de la matrice A et il est unitaire (coefficient dominant égal à 1). Montrons que c'est le polynôme minimal par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme annulateur de plus bas degré $Q(X) = q_0\, + q_1\, X + q_2\, X^2\, + \cdots + q_p\, X^p, p \leq n - 1$. Alors :

$$q_0\, I_n\, + q_1\, A + q_2\, A^2\, + \cdots + q_p\, A^p = 0_n$$

Donc :

$$q_0\, X_0\, + q_1\, A\, X_0 + q_2\, A^2 X_0 + \cdots + q_p\, A^p\, X_0 = 0$$

La famille $(X_0, A\, X_0, A^2\, X_0, \dots, A^p\, X_0\,)$ est donc liée ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle est une sous famille de la famille libre $(X_0, A\, X_0, A^2\, X_0, \dots, A^{n-1}\, X_0\,)$.

On en déduit que le polynôme minimal de A est :

$$\boldsymbol{\pi_A (X) = X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \cdots a_2 X^2 - a_1 X - a_0}$$

Le polynôme caractéristique $\chi_A (X)$ étant un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, et d'après le théorème de Caley Hamilton, un multiple du polynôme caractéristique, on en déduit :

$$\boldsymbol{\chi_A (X) = (-1)^n \pi_A (X)}$$

3) <u>Matrice cyclique et diagonalisation</u>

Rappelons qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. On en déduit :

Une matrice cyclique est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et à racines simples.

Montrons alors le résultat suivant :

Une matrice diagonalisable est cyclique si et seulement si ses sous espaces propres sont tous de dimension 1 ce qui revient à dire que les éléments diagonaux de la matrice diagonale à laquelle elle est semblable sont tous distincts.

<u>Preuve</u> :

Si la matrice est diagonalisable et cyclique alors son polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc les sous espaces propres sont de dimension 1.

Réciproquement, si la matrice est semblable à une matrice diagonale $D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ à éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tous distincts, on a :

$$P^{-1} A P = D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Notons $P_1, P_2, \dots, P_n$ les colonnes de P. Elles vérifient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$A P_i = \lambda_i P_i$$

Donc :

$$A^2 P_i = A \lambda_i P_i = \lambda_i A P_i = {\lambda_i}^2 P_i$$

Soit par une récurrence évidente , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k P_i = {\lambda_i}^k P_i$$

Posons:

$$X_0 = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

On a alors :

$$A\, X_0 = \lambda_1\, P_1 + \lambda_2\, P_2 + \cdots + \lambda_n\, P_n$$

$$A^2\, X_0 = {\lambda_1}^2\, P_1 + {\lambda_2}^2\, P_2 + \cdots + {\lambda_n}^2\, P_n$$

Etc….

$$A^{n-1}\, X_0 = {\lambda_1}^{n-1}\, P_1 + {\lambda_2}^{n-1}\, P_2 + \cdots + {\lambda_n}^{n-1}\, P_n$$

Ainsi :

$$P\ \ V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (X_0 \mid A\, X_0 \mid A^2 X_0 \mid \dots \mid A^{n-1}\, X_0\ )$$

Où $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est une matrice de vandermonde à coefficients tous distincts donc inversible. Ainsi la matrice $(X_0 \mid A\, X_0 \mid A^2 X_0 \mid \dots \mid A^{n-1}\, X_0\ )$ est inversible et A est cyclique.

<u>Exemple de matrice cyclique non diagonalisable :</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A n'a qu'une valeur propre, 1 et n'est pas la matrice identité. Elle n'est donc pas diagonalisable. Notons :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A\ \ E_1 = E_1$$

$$A\ \ E_2 = E_1 + E_2$$

Donc la famille $(E_2,\ A\ \ E_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{K})$ et A est donc cyclique.

<u>Exemples de matrice diagonalisable non cyclique</u> :

Une matrice d'homothétie d'ordre n, $A = \lambda\, I_n$ est diagonale donc diagonalisable mais n'est pas cyclique car pour tout vecteur colonne X_0, le couple $(X_0, A\, X_0)$ est lié.